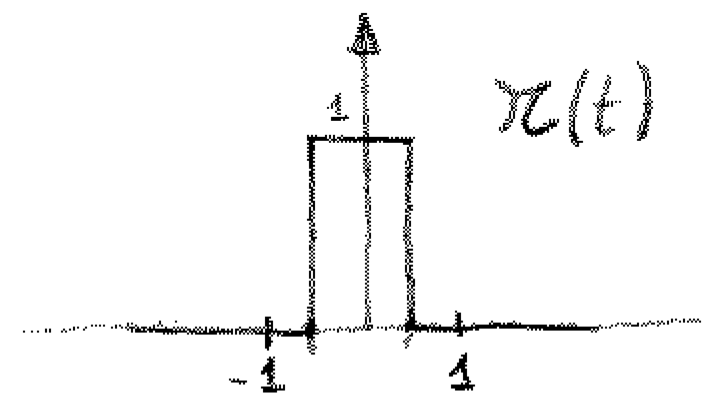
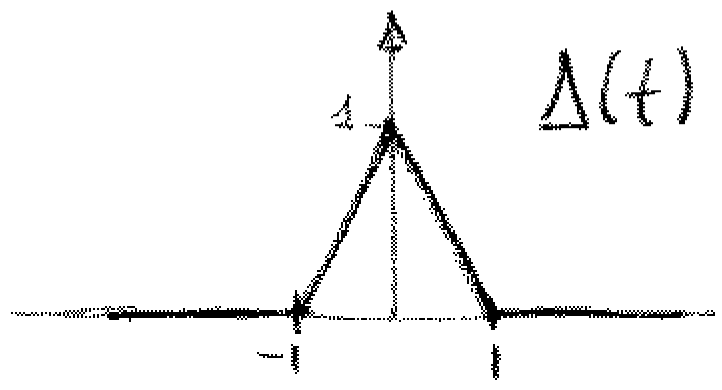
TEMA 1: INTRODUCCIÓ ALS SENYALS I SISTEMES

$$\boxed{x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}} \qquad \boxed{x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}}$$

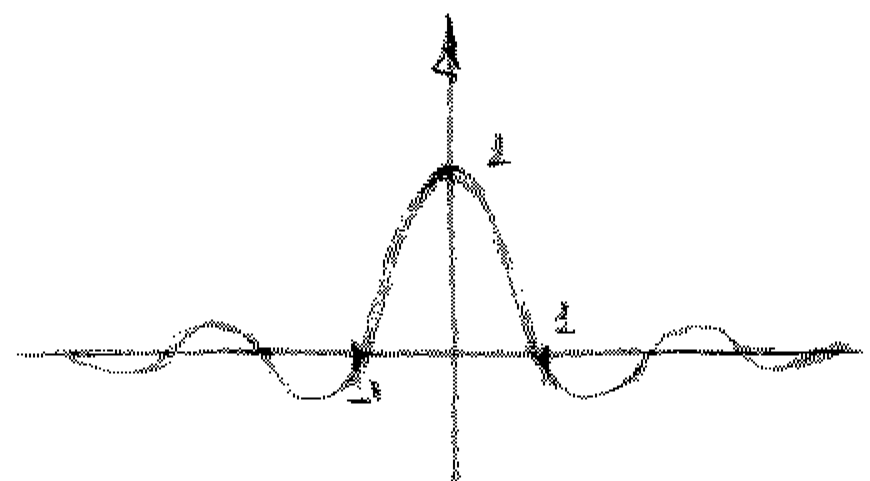
- SENYALS BÀSICS



* Pols rectangular



* Pols triangular



* Funció sinc

$$\boxed{\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}$$

* Funció delta de Dirac $[\delta(t)]$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)} \quad \text{o bé} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \Big|_{\delta(t)=0\,/\,t\neq 0}$$

Propietats:

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)} \qquad \boxed{\delta(-t) = \delta(t)}$$

$$\boxed{x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)} \qquad \boxed{\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[U(t)\right]}$$

- PROPIETATS DELS SISTEMES

* Linealitat : $T[a x_1(t) + b x_2(t)] \overset{!!}{=} a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$

* Invariància : $T[x(t-t_0)] = T[x(t)]\big|_{t \to t-t_0}$

* Causalitat : Si la sortida no depen de valors futurs d'entrada

* Estabilitat : Si $|x(t)| < C \Rightarrow |y(t)| < D$

* Memoria : Si la sortida depen de valors anteriors o futurs d'entrada

* Invertibilitat : Si entrades diferents donen lloc a sortides diferents

- RESPOSTA IMPULSIONAL D'UN SISTEMA (CONVOLUCIÓ)

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \;;\quad x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Resposta impulsional ⇒ resposta a $\delta(t)$

$$y(t) = \boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

- Convolució gràfica $f(t) * g(t)$

1er) Una de les funcions s'inverteix $g(-\tau)$

2on) $g(-\tau)$ es desplaça t ⇒ $g(t-\tau)$

3er) Es multipliquen i integren $\int_{x_0}^{x_1} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$ distinguint

intervals de t on $f(\tau)g(t-\tau)$ dona lloc a funcions diferents

- Propietats dels sistemes L.I segons la seva $h(t)$

* Causalitat : $h(t) = 0$ per $\forall t < 0$

* Estabilitat : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

* Amb memoria : $h(t) \neq K\,\delta(t)$

* Invertible : $\exists h_I \,/\, h(t) * h_I(t) = \delta(t)$

- Filtres pas-baix

$$H_n(f) = \frac{1}{(1 + j f/f_\alpha)^{n+1}} \qquad f_\alpha = \alpha/2\pi$$

$$|H_n(f)|_{dB} = -10(n+1)\log\left(1 + (f/f_\alpha)^2\right)$$

- $f \to 0$: 0
- $f \to f_\alpha$: $-3(n+1)$
- $f \gg f_\alpha$: $-20(n+1)\log(f/f_\alpha)$

$$f_\alpha = f_c\left(2^{1/(n+1)} - 1\right)^{-1/2}$$

TEMA 2: TRANSFORMADA DE FOURIER

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{S.L.I} \longrightarrow e^{st}H(s) \begin{cases} s = \sigma + \underbrace{j2\pi f}_{s} & H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau \quad \text{trans Laplace} \\ s = +j2\pi f & H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau \quad \text{trans. Fourier} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(x(t)) = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt} \qquad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(X(f)) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t}\, df}$$

* Condició suficient per a la existència de la transformada de Fourier:

$x(t)$ és quadrat integrable $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$

* Propietats de la transformada de Fourier

- LINEALITAT: $a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X_1(f) + b X_2(f)$
- SIMETRIES: $x(t)$ parell/imparell $\longleftrightarrow$ $X(t)$ parell/imparell

  $x(t)$ real/imaginaria $\longleftrightarrow$ $X(t)$ hermítica/antihermítica

  $X(f) = \overline{X(-f)}$, $X(f) = -\overline{X(-f)}$

  $\mathcal{F}^{-1}\{Re\{X(f)\}\} = Parell\{x(t)\}$

  $\mathcal{F}^{-1}\{Im\{X(f)\}\} = j\, Senar\{x(t)\}$
- DESPLAÇAMENT TEMPORAL: $x(t) \leftrightarrow X(t) \Rightarrow x(t-t_0) \longrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
- ESCALAT: $x(at) \longleftrightarrow 1/|a|\, X(f/a)$
- TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓ: $x(t) * h(t) \longleftrightarrow X(f) H(f)$
- DUALITAT: $x(t) \longleftrightarrow X(f) \Rightarrow X(t) \longleftrightarrow x(-f)$
- INTEGRACIÓ: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$
- DERIVACIÓ:
  - En temps: $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f\, X(f)$
  - En freqüència: $-j2\pi t\, x(t) \longleftrightarrow \frac{dX(f)}{df}$
- TRANSFORMADA DEL PRODUCTE: $x(t)\, h(t) \longleftrightarrow X(f) * H(f)$
- MODULACIÓ: $x(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$
- TEOREMA DE PARSEVAL: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\overline{Y(f)}\, df$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \Rightarrow$ Es conserven les energies.

* TRANSFORMADES DE FOURIER BÀSIQUES

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \qquad \delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{-at}U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f} \qquad e^{at}U(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$\Pi(t) \longleftrightarrow \text{sinc}(f) \qquad \Delta(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2(f)$$

$$\text{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \qquad U(t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

* LIMITACIÓ TEMPORAL: FINESTRES

$$\boxed{x_w(t) = x(t)\,\Pi(t/T) \longrightarrow X_w = X(f) * (T\,\text{sinc}(Tf))}$$

	$W(t)$	$W(f)$	α_{ps}	Δf_{ps}	dB/dec
Rectangular	$\Pi(t/T)$	$T\text{sinc}(Tf)$	13 dB	$2/T$	20
Triangular	$\Delta(2t/T)$	$T/2\, \text{sinc}^2(T/2\, f)$	26 dB	$4/T$	40
Hanning	$\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)\Pi(t/T)$	$T/2\ \frac{\text{sinc}(Tf)}{1-(fT)^2}$	32 dB	$4/T$	60

* T.F. DE SENYALS PERIÒDICS

$$\boxed{x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j2\pi \frac{m}{T} t} \quad ; \quad C_m = \frac{1}{T} X_b\left(\frac{m}{T}\right)} \quad X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C(m)|^2$$ Potència mitjana d'un període

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\phi\left(\frac{m}{T}\right)$$ Fòrmula Poisson per simplificar suma de sèries.

* MOSTRATGE

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{m}{T}\right)}$$ IDEAL

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\overbrace{\text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)}^{h(t)}}$$ Filtre d'interpolació

- Teorema de Nyquist: Un senyal de banda limitada es pot recuperar a partir de les seves mostres si: $\boxed{\frac{1}{T} \geq 2B}$

TEMA 3: FILTRES ANALÒGICS. Tª DE L'APROXIMAXIÓ

- Pq un filtre sigui realitzable $h(t)$ ha de ser real, causal, estable i $H(S)$ ha de complir:
  - $\boxed{\# \text{Pols} \geq \# \text{Zeros}}$
  - Pols parells complexes conjugats, en semiplà esquerre.

* Pasos a seguir per obtenir $H(s)$

$$\boxed{\text{Especif. en } f} \xrightarrow{F(\omega^2) \to |H(\omega)|^2} \boxed{H(S)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{h(t)}$$

Restriccions en S

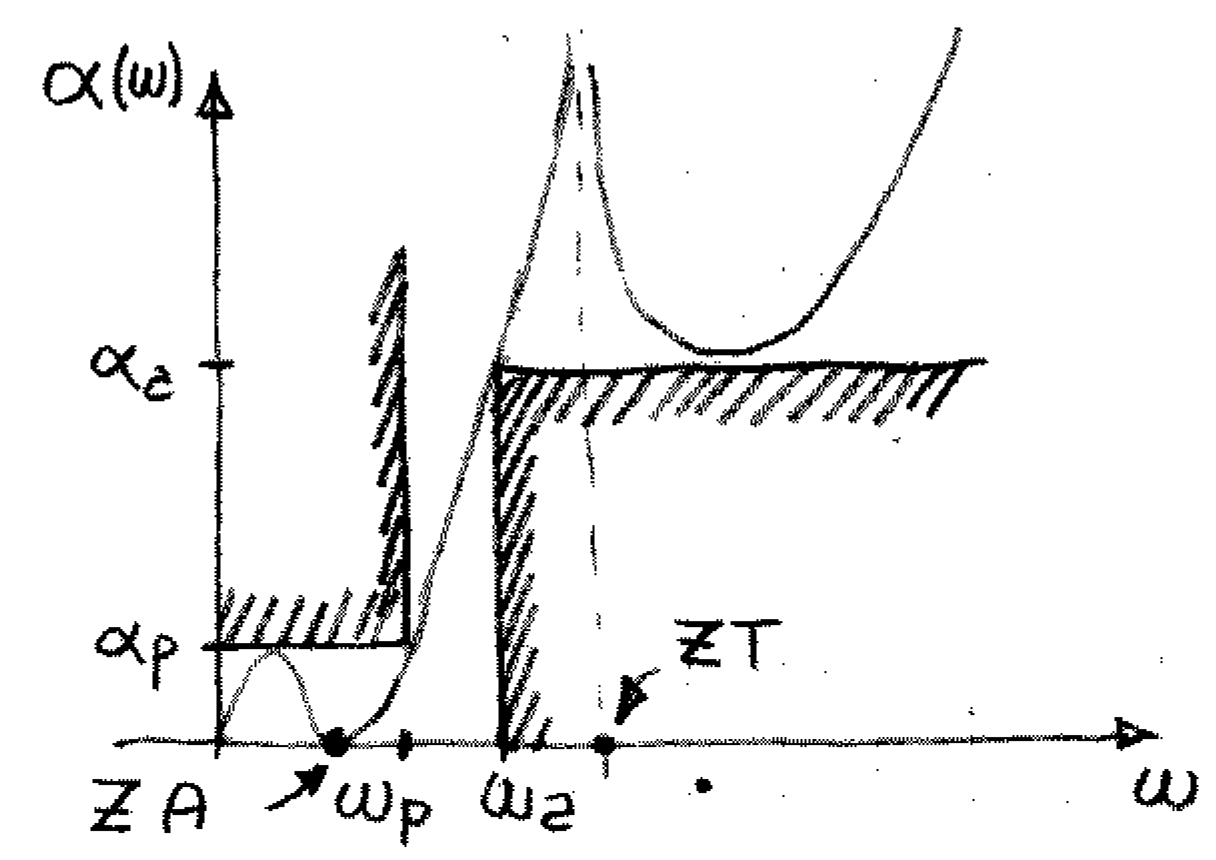
* FUNCIONS ÚTILS

Funció atenuació
$$\boxed{\alpha(\omega) = 10 \log\left[1 + F(\omega^2)\right]}$$

$$\boxed{F(\omega^2) = \frac{H_{max}}{|H(\omega)|^2} - 1}$$
Funció característica

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{H_{max}}{1 + F(\omega^2)} = H(S)\,H(-S)\Big|_{S=j\omega}}$$

* APROXIMACIÓ PASSA-BAIXES



Característiques del filtre

- Selectivitat $\boxed{K_S = \omega_P / \omega_a}$ $0 < K_S < 1$
- Discriminació $\boxed{K_d = \frac{\sqrt{10^{\alpha_P/10} - 1}}{\sqrt{10^{\alpha_a/10} - 1}}}$ $0 < K_d < 1$

$$\boxed{F(\omega^2) = K \frac{\omega^{2l_0} \prod^{L} (\omega^2 - \omega_{oi}^2)^2}{\prod^{P} (\omega^2 - \omega_{\infty i}^2)^2}}$$

$$\boxed{l_0 + 2L = p_\infty + 2p}$$

$\boxed{n = \# ZA = \# ZT}$ Ordre del filtre

- Tendencia assimptòtica

$$\lim_{\omega \to \infty} F(\omega^2) = K \omega^{2p_\infty} \Rightarrow \lim_{\omega \to \infty} \alpha(\omega) \Rightarrow \boxed{6 p_\infty \frac{dB}{Oct} \text{ ó } 20 p_\infty \frac{dB}{dec}}$$

IDEM $\omega \to 0$, l_0

* Aproximació de Butterworth

(Deducible fàcilm)

$$\boxed{F(\omega^2)=K^2\omega^{2n}} \qquad \boxed{n \geq \frac{\ln K_d}{\ln K_s}} \qquad \boxed{K^2=\frac{10^{\alpha p/10}-1}{\omega_p^{2n}}}$$

Ajust a la Bda de pas

- Normalització de freqüències (Per simplificar càlculs)

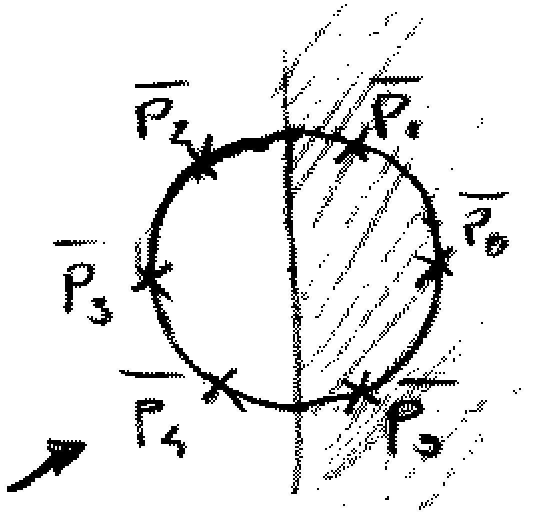
$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{3dB}} \Rightarrow \boxed{F(\bar{\omega}^2) = \bar{\omega}^{2n}}$$

- Funció de transferència $H(S)$ $\quad \boxed{\bar{P}_i = e^{j\frac{\pi}{n}i}}$ n senar

$$\boxed{H(\bar{S})=\frac{H_{max}}{(\bar{S}-\bar{P}_1)\cdots(\bar{S}-\bar{P}_n)}} \qquad \boxed{\bar{p}_i = e^{j\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}i\right)}}$$

n parell

Agafem els $\bar{P}_i$ amb $Re\{\bar{P}_i\}<0$



* Aproximació de Chebychev

$C_n(1)=1$; $C_n(0)=\begin{cases}0 & n \text{ senar} \\ (-1)^{n/2} & n \text{ parell}\end{cases}$

$$\boxed{F(\omega^2)=\varepsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_p)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &C_0=1 \quad ; \quad C_1 = x \\ &C_n(x) = 2x\,C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)\end{aligned}}$$

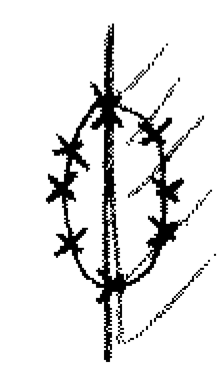
$$\boxed{n \geq \frac{ch^{-1}(1/K_d)}{ch^{-1}(1/K_s)}} \qquad \boxed{\varepsilon^2 = 10^{\alpha p/10}-1} \qquad \boxed{\varepsilon^2=\frac{10^{\alpha a/10}-1}{C_n^2(\omega_a/\omega_p)}}$$

Ajust Bda. Pas — Ajust Bda. Atenuada

- Funció de transf.

$$\boxed{H(S) = \frac{H_{max}\cdot B}{(S-P_0)(S-P_1)\cdots(S-P_n)}} \qquad p_i = \frac{\omega_p}{2}\left[\frac{r-1}{r}\cos\theta_i + j\,\frac{r+1}{r}\sin\theta_i\right]$$

$$B = \frac{\omega_p^{n}}{\varepsilon\,\omega\,n} \quad ; \quad r=\left[\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right]^{1/n} \quad ; \quad \theta_i = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}i$$



* Aproximació inversa de Chebychev

$$\boxed{F(\omega^2)=\frac{1}{\varepsilon^2 C_n^2(\omega_a/\omega)}} \qquad \boxed{n \geq \frac{ch^{-1}(1/K_d)}{ch^{-1}(1/K_s)}}$$

(IDEM CHEBY)

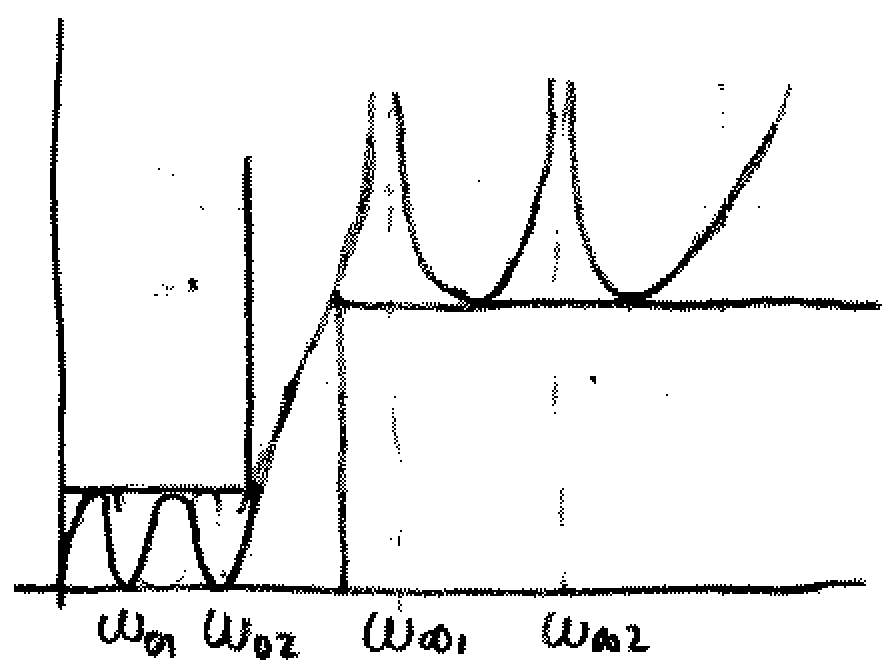
$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon^2} = (10^{\alpha p/10}-1)\,C_n(\omega_a/\omega_p)} \qquad \boxed{\frac{1}{\varepsilon^2} = 10^{\alpha a/10}-1}$$

Ajust Bda de pas — Ajust Bda. Atenuada

- Funció de transf.

$$\boxed{p_i = \frac{\omega_a\,\omega_p}{P_i(\text{Cheby})}}$$

* APROXIMACIÒ EL·LÍPTICA (CAVER)



$$F(\omega^2) = \frac{K\omega^{2l_0}(\omega^2-\omega_{01}^2)^2 \cdots (\omega^2-\omega_{0i}^2)^2}{(\omega^2-\omega_{\infty 1}^2)^2 \cdots (\omega^2-\omega_{\infty j}^2)^2}$$

$\boxed{n \text{ mínim possible}}$

te simetria geomètrica $\quad F(\omega^2) = \dfrac{F^2(\omega_0^2)}{F\left(\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2\right)} \quad \omega_0 = \omega_a \omega_p$

* TRANSFORMACIÓ DE FREQÜÈNCIES

- Transf. Paso-bajo a Paso-bajo $\quad \boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_{nor}}} \quad \boxed{\lambda = \dfrac{s}{\omega_{nor}}}$

- Transf. Paso-bajo a Paso-alto $\quad \boxed{\Omega = -\dfrac{1}{\omega}} \quad \boxed{\lambda = \dfrac{1}{s}}$

- Transf. Paso-bajo a Paso-banda

$\omega_{x2} - \omega_{x1} = \Omega_x \mid \omega_{x1} \cdot \omega_{x2} = \omega_0^2$

$\boxed{\Omega = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}} \quad \boxed{\lambda = \dfrac{s^2 + \omega_0^2}{s}} \quad \boxed{\omega_0^2 = \omega_{p1} \cdot \omega_{p2}}$

menor selectivitat $\Rightarrow$ menor ordre

- Transf. Paso-bajo a Banda-eliminada

$\boxed{\Omega = \dfrac{-\omega}{\omega^2 - \omega_\infty^2}} \quad \boxed{\lambda = \dfrac{s}{s^2 + \omega_\infty^2}} \quad \boxed{\omega_\infty^2 = \omega_{a1} \cdot \omega_{a2}}$ menor ordre

TEMA 4: CORRELACIÓ I ESPECTRE

* SENYALS D'ENERGIA FINITA (EF) $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df} < \infty$$

$$\boxed{S_x = |X(f)|^2} \Rightarrow \boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \, df}$$

Densitat espectral d'energia

• CORRELACIÓ CREUADA

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y(t) dt$

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

PROP:
1) $|R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_x E_y$
2) $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$

$F[R_{xy}(t)] = S_{xy}(f)$ $\boxed{S_{xy}(f) = X(f) * Y^*(f)} \Rightarrow \boxed{R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) \, df}$

Densitat espectral d'energia creuada

• FUNCIÓ D'AUTOCORRELACIÓ

$$\boxed{R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)} \qquad \boxed{S_x(f) = |X(f)|^2}$$

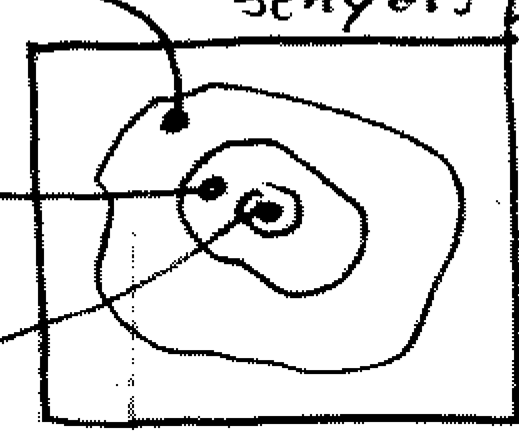
PROP:
1) $R_x(0) = E_x$
2) $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
3) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
4) $S_x(f) \geq 0$

$E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \, df$

$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = S_x(f)$

- Senyals incoherents $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{R_{xy}(0)\} = 0$
- " " ortogonals $\Rightarrow$ $R_{xy}(0) = 0$
- " " incorrelats $\Rightarrow$ $R_{xy}(\tau) = 0$

senyals EF



* CORRELACIÓ I SLI

$x(t)$ → $h(t)$ → $y(t)$

$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau) \longrightarrow S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f)$

$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \longrightarrow S_{yx}(f) = S_x(f) H(f)$

$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \longrightarrow \boxed{S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2}$

* SENYALS DE POTÈNCIA MITJANA FINITA (PMF) $P_x < \infty$

$$\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt} \quad < \infty$$

- <u>No periòdics</u> $\quad x_T(t) = x(t)\,\Pi(t/T)$

$$\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2\, df}$$

- <u>Periòdics</u> (Periode T_0)

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2\, dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2}$$

- <u>Densitat espectral de potència</u>

$$\boxed{S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X_T(f)|^2} \Rightarrow \boxed{P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df}$$

* CORRELACIÓ CREUADA I AUTOCORRELACIÓ

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, y^*(t)\, dt} \Rightarrow S_{xy}(f)$$

$$\boxed{R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\, x^*(t)\, dt} \Rightarrow S_x(f)$$

<u>PROPIETATS</u>:

1) $R_x(0) = P_x$
2) $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
3) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
4) $S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$

- <u>Senyals periòdics</u>

$$\boxed{\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \sum_n C_n' e^{j2\pi n f_r \tau} \\ R_x(\tau) &= \sum_n |C_n|^2 e^{j2\pi n f_x \tau} \end{aligned}}$$

$C_n' = C_n^x\, \overline{C_m^y}$

$f_r = \bar{n} f_x = \bar{m} f_y$ mínims possib.

* CORRELACIÓ I SLI

$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \longrightarrow S_{yx}(f) = S_x(f)\, H(f)$

$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \to S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$