PIPE

TEMA 0: COMBINATORIA

ES PODEN REPETIR ELS ELEMENTS?

- NO → IMPORTA L'ORDRE?
  - NO → $\boxed{C_m^n = \frac{V_m^n}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}}$
  - SI → $\boxed{V_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1)}$
    - $\boxed{m=n \Rightarrow P_n = n!}$
- SI → ES REPETEIXEN TOTS PER IGUAL
  - NO → $\boxed{PR_n^{n_1,n_2,n_3,\dots} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}}$
  - SI → $\boxed{VR_m^n = m^n}$
  - no importa l'ordre → $\boxed{CR_m^n = C_{m+n-1}^n}$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A LA TEORIA DE LA PROBABILITAT

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}}$$

$$\boxed{P(A) = 1 + P(\bar{A})}$$

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\le j\le n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}$$

* PROBABILITAT CONDICIONADA $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

* ESDEVENIMENTS INDEPENDENTS $\boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$

* TEOR. PROBABILITAT TOTAL $\boxed{P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$
  B_i: Partició de (Ω)

* FORMULA DE BAYES $\boxed{\underset{i=1,2,\dots,k}{P(A_i|A)} = \frac{P(A|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_k P(A|A_k)\cdot P(A_k)}}$

* PROBABILITAT BINOMIAL $\boxed{P(\tilde{A}) = \binom{n}{r} P(A)^r\, P(\bar{A})^{n-r}}$

$n \to$ proves
$r \to$ casos favorables

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

TEMA 2: VARIABLES ALEATORIES

- VARIABLES ALEATORIES DISCRETES

$P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$, ... Funció de prob de X

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k}$$

* V.A. de Bernemilli $\quad P(X=0)=q$; $P(X=1)=p$ només 2 esdev.

* V.A. Binomial

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

* V.A. de Poisson

$$\boxed{P(X=k) = e^{-m_x} \frac{m_x^k}{k!}} \quad k \geq 0$$

Relació Binomial - Poisson

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \xrightarrow[np \to m_x]{n \to \infty,\ p \to 0} e^{-m_x} \frac{m_x^k}{k!}}$$

* V.A Geomètrica

$$\boxed{P(X=k) = q^{k-1} p}$$

Repetim k vegades l'experiment fins obtenir l'esdeveniment desitjat.

- Llei de prob. multinomial

$$\boxed{P(A) = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \cdots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}}$$

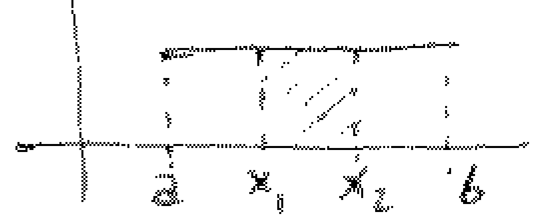
Ampliació de la binomial a més de 2 esdeveniments.

– VARIABLES ALEATORIES CONTINUES

Una v.a. és contínua si $\boxed{F_X(x) \equiv P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt}$

$f_X(x)$: funció densitat de prob.

* **V.A. Uniforme** $\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}}$



* **V.A Exponencial** "de param μ"

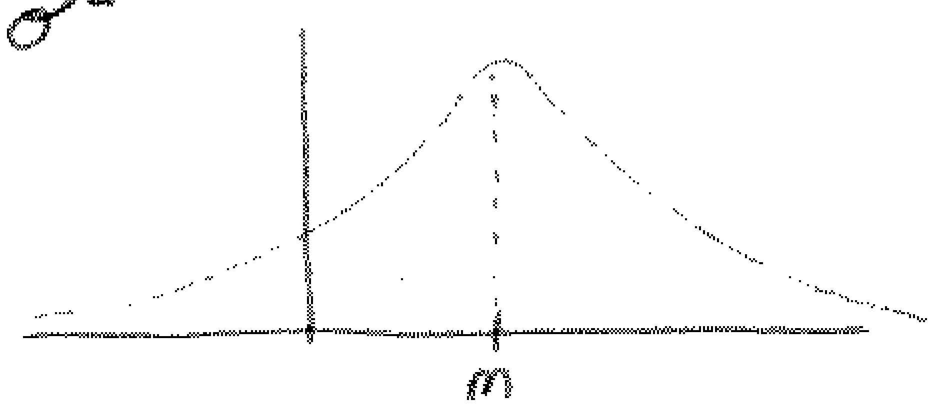
$$\boxed{f_T(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \mu e^{-\mu t} & t \geq 0 \end{cases} \qquad F_T(t) \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1-e^{-\mu t} & t>0 \end{cases}}$$

– **Relació Poisson - Exponencial**

Si $P(X=k)$ es de Poisson $\Rightarrow$ $P(T \leq t)$ és exponencial

* **V.A. Gaussiana** "de param m, σ^2"

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$



σ afecta a l'amplada de la campana

$$\boxed{erf(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt} \qquad x = \frac{x_1 - m_x}{\sigma} \; ; \; erf(x) = -erf(-x)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{\frac{x_1-m_x}{\sigma}}^{\frac{x_2-m_x}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = erf\left(\frac{x_2-m_x}{\sigma}\right) - erf\left(\frac{x_1-m_x}{\sigma}\right)$$

– **Relació Binomial - Gaussiana**

$$\boxed{P(X \leq x) = \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \underbrace{\overset{m_x \equiv np}{\sigma \equiv \sqrt{npq}}}_{} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

només si $np \geq 5$ i $nq \geq 5$

* Funció densitat generalitzada   X v.a. discreta

$$\boxed{f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta(x - x_i)}$$

* Funcions de distribució i densitat condicionades

$$\boxed{F_X(x) \equiv P(X \leq x)} \Rightarrow \boxed{F_X(x|B) = P(X \leq x \,|\, B)}$$

$$\boxed{P(A \,|\, X=x) = \frac{f_X(x|A)\, P(A)}{f_X(x)}}$$ si x és un punt on $f_X(x) \neq 0$

* TEOREMA DE LA PROBABILITAT TOTAL I FÓRMULA DE BAYES (v.a. contínua)

$$\boxed{P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \,|\, X=x)\, f_X(x)\, dx}$$

$$\boxed{f_X(x \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, X=x)\, f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A \,|\, X=t)\, f_X(t)\, dt}}$$

Tema 3: Funcions d'una V.A.

$$X \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow Y = g(X) \longrightarrow \boxed{h(y) = g^{-1}(y)} \longrightarrow X$$

- Cas $g(x)$ contínua i creixent

$$\boxed{F_Y(y) = F_X(h(y))}$$

- " decreixent

0 v.a cont

$$\boxed{F_Y(y) = 1 - F_X(h(y)) + \cancel{P(X = h(y))}}$$

- Cas general, $g(x)$ contínua a trossos

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x)|_{x=x_i}}}$$

intervals

Si no te solució : $f_Y(y) = 0$

solucions $y = g(x_i)$ } x_i en funció de y

Tema 4: Paràmetres estadístics

- X v.a discreta (pren valors x_i amb prob p_i)

$$\boxed{m_X \equiv E(X) = \sum_i x_i p_i} \qquad \boxed{\sigma_X^2 \equiv Var(X) = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_i}$$

- X v.a. contínua amb densitat de prob. $f_X(x)$

$$\boxed{m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx} \qquad \boxed{\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx}$$

m_X : Esperança $\quad \sigma_X^2$: Variància $\quad \sigma_X$: desviació típica

v.a	Uniforme	Indicatiu	Binomial	Geomètric	Gaussiana	Poisson	Exponencial
$E(X) = m_X$	$\frac{a+b}{2}$	p	mp	$1/p$	m	λ	$1/\mu$
$Var(X) = \sigma_X^2$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$p^2q + q^2p$	mpq	q/p^2	σ^2	λ	$1/\mu^2$

* En general, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ partició de Ω

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X|A_k)\, P(A_k)}$$

$$E(X|A_k) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X=x_i|A_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x|A_k)\,dx \end{cases}$$

* EL TEOREMA DE L'ESPERANÇA

$$E(Y) = E(g(X)) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) P(X=x_k) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx & \text{v.a. contínua} \end{cases}$$

* $$\boxed{Var(X) = E((X-m_X)^2) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

* DESIGUALTAT DE CHEBYSHEV

$$\boxed{P\{|X-m_X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}}$$

Prob. $m_X - \varepsilon < X < m_X + \varepsilon$ de que la v.a es trobi entre uns valors concrets

* Moments i moments centrats

$$\boxed{m_n = E(X^n)} \qquad \boxed{\mu_n = E((X-m_X)^n)} \qquad \mu_2 = \sigma^2$$

TEMA 5: V.A. BIDIMENSIONAL

* FUNCIÓ DISTRIBUCIÓ

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)}$$

PROPIETATS:
- $F_{XY}(x,\infty) = F_X(x)$ ídem y
- $F_{XY}(-\infty,y) = 0$ " "
- $F_{XY}(\infty,\infty) = 1$

continu

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv}$$

Discret

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_i \leq y} P_{XY}(x_i,y_i)}$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1)$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(u,v)\,du\,dv$$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}}$$

FUNCIÓ DENSITAT

* FUNCIONS DISTRIBUCIÓ I DENSITAT MARGINALS

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)\,du\,dv}$$

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,v)\,dv}$$

* FUNCIONS DISTRIBUCIÓ I DENSITAT CONDICIONADES

$$\boxed{F_{Y|X}(y|X=x) = \frac{\partial/\partial x\, F_{XY}(x,y)}{f_X(x)}}$$

$$\boxed{f_{X|Y}(y|X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)\,dx}$$

Versió continua Tª Prob. Total

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)}{f_Y(y)}}$$

Versió continua de Bayes

* ESPERANCES CONDICIONADES

$$\boxed{E(Y|B) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y|B)\,dy}$$

TEOREMA

$$\boxed{E(E(Y|X)) = E(Y)}$$

* SI X, Y v.a independents

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F(y) \quad ; \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

TEMA 6: FUNCIONS DE 2 V.A.

F. DISTRIBUCIÓ

$$\boxed{F_Z(z) = \iint_{D_z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

$Z = g(X,Y)$

$D_z = \{(x,y) : g(x,y) \le z\}$

F. DENSITAT

$$\boxed{f_{ZT}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}}$$

$z = g(x,y)$, $t = h(x,y)$ $\quad \begin{cases} x_i = x_i(z,t) \\ y_i = y_i(z,t) \end{cases}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial y \end{vmatrix}$$

$f_{ZT}(z,t) = 0 \Leftarrow$ Si el sistema no té solució {no es poden expressar (x,y) en funció de (z,t)}

<u>TEOR</u>: Si X,Y v.a. <u>indep</u>. $\Rightarrow \boxed{f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)}$ $Z = X+Y$

* T^a DE L'ESPERANÇA BIDIMENSIONAL

$$\boxed{E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy} \qquad Z = g(X,Y)$$

<u>PROP</u>:

1) Lineal $\quad E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

2) Si X,Y <u>indep</u> $\quad E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$

- <u>Moments de 2 v.a</u>

$$\boxed{m_{ij} = E(X^i Y^j)}$$

- <u>Moments centrats</u>

$$\boxed{\mu_{ij} = E\left((X-m_x)^i (Y-m_y)^j\right)}$$

<u>Covariància</u> $\Rightarrow \boxed{\mu_{11} = E(XY) - E(X)E(Y)}$

* COEFICIENT DE CORRELACIÓ

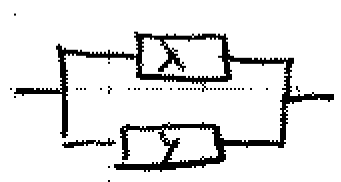
$$\boxed{\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\,\mu_{02}}} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y}}$$

$-1 \le \rho \le 1$

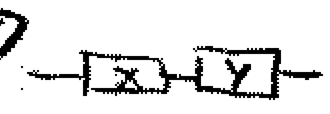
$\rho = 0 \Leftrightarrow$ X,Y v.a <u>indep</u>

$|\rho| = 1 \Leftrightarrow$ X,Y depenen linealment

$\rho = 0 \Rightarrow$ V.A. <u>incorrelades</u>



$F_Z(z) = F_{XY}(z,z)$

- Funció mínim $\Rightarrow Z = \min(X,Y) \Rightarrow$  $F_Z(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_{XY}(z,z)$

"TEMA 7": EXTENSIÓ AL CAS N-DIM

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\boxed{F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)}$$

$$\boxed{f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}}$$

- Si fem tendir a ∞ alguns dels arguments x_i obtenim la funció de distribució conjunta de les v.a corresponents als altres.

TEOR.: Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ incorrelades 2 a 2

$$\sigma_Z^2 = \alpha_1^2 \sigma_{X_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{X_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_{X_n}^2$$

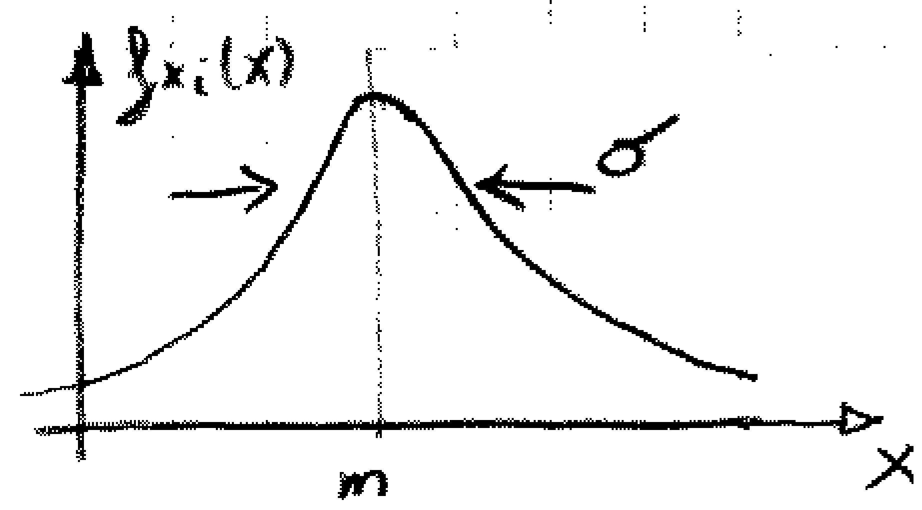
$$Y_K = g_K(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\boxed{f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_i \frac{f_X(x_1^i, \dots, x_n^i)}{|J(x_1^i, \dots, x_n^i)|}}$$

$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ si no es pot expressar $(x_1, \dots, x_n)$ en funció $(y_1, \dots, y_n)$

* LA LLEI DÈBIL DELS GRANS NOMBRES

$X_1, X_2, \dots, X_n$ incorrelades 2 a 2 amb $E(X_i) = m$, $Var(X_i) = \sigma^2 \ \forall i$



$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E(\overline{X}) = m \ ; E(\overline{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$$

$$Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - m^2$$

$\boxed{n \to \infty}$ $\boxed{F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}$ Per a n gran $Y \to$ gauss

* VARIABLES ALEATORIES GAUSSIANES N-DIM

$$K_X = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \\ K_{n1} & & K_{nn} \end{pmatrix}$$ ← Matriu de covariàncies

$$K_{ij} \equiv K_{ji} \equiv \mu_{11}(X_i, X_j) = E((X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j}))$$

$$\boxed{\text{Si } Y = A \cdot X \Rightarrow \begin{cases} m_Y = A m_X \\ K_Y = A K_X A^t \end{cases}}$$

$$m_X = \begin{pmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \\ \vdots \\ m_{X_n} \end{pmatrix}$$

* GAUSS CONDICIONADA

$$\boxed{f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma'} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m'}{\sigma'}\right)^2}}$$

$$m' = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X) + m_Y$$

$$\sigma' = \sqrt{1-\rho^2}\, \sigma_Y$$

TEMA 8 : ESTIMACIÓ DE V.A.

* *Estimadors en mitjana quadràtica* (m.q.)

  $\hat{Y}$ (Millor estimador de Y) $\Rightarrow \varepsilon \equiv E((Y-\hat{Y})^2)$ mínim

* ESTIMADOR EN M.Q. MITJANÇANT UNA CONSTANT $\hat{Y} = K$

  $\boxed{\hat{Y} = K = m_Y}$ $\boxed{\varepsilon_{min} = \sigma_Y^2}$

* ESTIMADOR "NO LINEAL" EN M.Q. $\boxed{\hat{Y} = E(Y|X)}$

  PROP:

  1) Si X, Y, v.a indep. $\Rightarrow \hat{Y} = E(Y)$

  2) Lineals $\widehat{(Y_1+Y_2)} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2$; $\widehat{\alpha Y} = \alpha \hat{Y}$

  3) $E(\hat{Y}) = E(Y)$

* ESTIMADOR LINEAL EN M.Q. $\hat{Y} = aX + b$

  $\boxed{\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y}$ $\boxed{\varepsilon_{min} = (1-\rho^2)\sigma_Y^2}$

  PROP:

  1) $\rho = 0 \Rightarrow \hat{Y} = m_Y$; $\varepsilon_{min} = \sigma_Y^2$

  2) X, Y conjuntament gaussianes $\Rightarrow$ L'estimador lineal és optim

  3) Si $\hat{Y} = aX$ (estimador lineal homogeni) $\Rightarrow a = \frac{E(XY)}{E(X^2)}$

* PRINCIPI D'ORTOGONALITAT

  $E(XY) = \langle X, Y \rangle$: defineix un prod. escalar

  - Els valors de a, b que fan mínim $\varepsilon = E((Y-\hat{Y})^2)$:

$$\begin{array}{l} \varepsilon \perp 1 \\ \varepsilon \perp X \end{array} \left\{ \boxed{\begin{array}{l} E(Y-\hat{Y}) = 0 \\ E((Y-\hat{Y})X) = 0 \end{array}} \right.$$

  $\varepsilon_{min} = E((Y-\hat{Y})|Y)$

  $a = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ $b = m_Y - a m_X$

  - *Estimador lineal multidimensional*

  $\hat{Y} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + b$

  a_i i b q. minimitzen $E((Y-\hat{Y})^2) \Rightarrow b = m_Y - a m_{X_1} - \dots a m_{X_n}$

  Principi ortog. $\left\{ \begin{array}{l} Y-\hat{Y} \perp 1 \\ Y-\hat{Y} \perp X_i \end{array} \right.$

TEMA 9: INTRODUCCIÓ ALS PROCESSOS ESTOCÀSTICS

- Procès estocàstic: Model matemàtic d'un senyal que varia aleatoriament amb el temps.

$$\boxed{F_x(x;t) = P(X(t) \le x)}$$

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_n) \le x_n)$$

$$m_x(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x;t)\,dx & X(t) \text{ continu en resultats} \\ \sum_K x_K P(X(t) = x_K) & X(t) \text{ discret en resultats} \end{cases}$$

* FUNCIÓ D'AUTOCORRELACIÓ

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))}$$

* FUNCIÓ D'AUTOCOVARIANCIA

$$\boxed{C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2)}$$

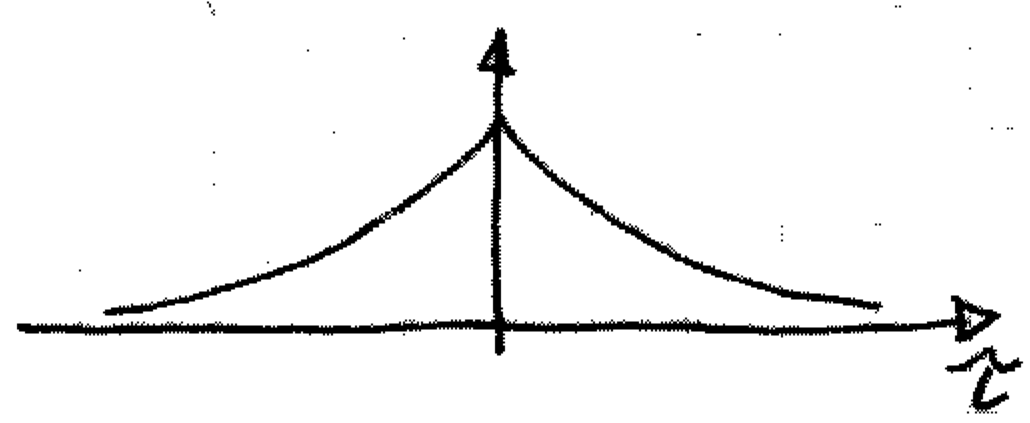
* PROCESOS ESTACIONARIS

- Un procès és estacionari en sentit estricte si les seves propietats probabilistiques no depenen de l'origen de temps fixat.

$$\boxed{F_x(x;t) = F_x(x; t+\tau)}$$ no depenen de t_1, t_2, només de la diferen.

$$\boxed{m_x(t) = m_x \text{ (cte)}} \quad \boxed{R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)} \quad \boxed{C_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) - m_x^2}$$

PROPIETATS DE $R_x(\tau)$



1/ No depen de t
2/ És parella
3/ $R_x(t,t) = R_x(0)$ ≡ Potència mitjana $X(t)$
4/ $|R_x(\tau)| \le R_x(0)$

- $X(t)$ és estacionari en sentit ampli si:

$$\boxed{m_x(t) = m_x} \quad \boxed{R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)}$$

P.E s.e
P.E s.a

TEMA 10: EXEMPLES DE PROCESSOS ESTOCÀSTICS

- Procès de Poisson

$$\boxed{P(X(t) = K) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^K}{K!}}$$

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2}$$

- Senyal telegràfic ...

TEMA 11: PROCESSOS ERGÒDICS

- Un procès estocàstic $X(t)$ és ergòdic si les seves propietats probabilístiques es poden obtenir processant en el temps una única realització del mateix.

* INTEGRALS DE PROCESSOS ESTOCÀSTICS

$$\boxed{I = \int_a^b X(t)\,dt} \quad \boxed{m_I = \int_a^b m_x(t)\,dt} \quad \boxed{\sigma_I^2 = \int_a^b \int_a^b C_x(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2}$$

* ERGODICITAT EN VALOR MITJÀ

- Un procès (estacionari en s.a) és ergòdic en valor mitjà si podem obtenir m_x processant en el temps una única realització del procès.

$$\boxed{\mathcal{M}_T \equiv \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt}$$ Valor mitjà temporal de $X(t)$ en $[-T,T]$

$$\boxed{E(\mathcal{M}_T) = m_x}$$ $\mathcal{M}_T$ és un estimador del paràmetre m_x

Si $\boxed{\sigma_T^2 = E\left((\mathcal{M}_T - m_x)^2\right) \xrightarrow{T\to\infty} 0} \Rightarrow$ $X(t)$ es ergòdic en v.m en ~~del~~ el sentit ~~de~~ de m.q.

$X(t)$ ergòdic en v.m $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C_x(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)d\tau = 0}$

- Condició necessària : Si $\left(\lim_{\tau\to\infty} C_x(\tau)\ \exists\right) = 0$

- Cond. suficients :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |C_x(\tau)|\,d\tau < \infty} \quad \boxed{C_x(0) < 0 \text{ i } \lim_{\tau\to\infty} C_x(\tau) = 0}$$

* ERGODICITAT EN AUTOCORRELACIÓ

- Podem obtenir $R_x(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$ processant en t una única...

$$\boxed{E(R_T(\tau)) = E\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)\,dt\right) = R_x(\tau)}$$

Si $\boxed{\mathrm{Var}(R_T(\tau)) \xrightarrow{\tau\to\infty} 0}$ $X(t)$ ergòdic en autocorrelació

$\boxed{\Phi_\tau(t) = X(t)X(t+\tau)}$ Si $\Phi_\tau(t)$ ergò. en m.q $\Rightarrow X(t)$ ergò. en autocorrelació