MATEL:

◦ PROPIETATS DEL PRODUCTE ESCALAR

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
2. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
5. $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
6. $\langle x, y \rangle < \infty \quad \forall x, y$
7. $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$

$$\boxed{\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}} \qquad \boxed{\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) \overline{y(t)} \, dt}$$

$\mathcal{L}^2(a,b)$ espai vectorial de funcions complexes de quadrat integrable → (Energia finita)

- Norma $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}}$
- Distància $\boxed{d(x,y) := \|x - y\|} \geq 0$
- Desigualtat Cauchy-Schwarz ⇒ Desig. triangular

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|} \Rightarrow \boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

◦ **ESPAIS DE HILBERT** : Espai vectorial dotat de prod. escalar i complet ⇒ "tota succesió de Cauchy és convergent"

◦ MÈTODE D'ORTONORMALITZACIÓ DE GRAM-SCHMIDT

* Vector normalitzat $(\|\phi\| = 1)$ ⇒ $x/\|x\|$ "vector normalitzat"
* Vectors x, y són ortogonals $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$
* $x_1, x_2, \dots, x_n$, l.i. $\xrightarrow{G-S}$ $y_1, y_2, \dots, y_n$ ortogonals

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, y_k \rangle}{\langle y_k, y_k \rangle} y_k \end{aligned}}$$

∘ APROXIMACIÓ PER MÍNIMS QUADRATS

$$\boxed{y \simeq \hat{y} = \sum c_i x_i} \Rightarrow \text{volem minimitzar } \|y-\hat{y}\|^2$$

$$\text{MIN } \|y-\hat{y}\|^2 \Leftrightarrow y-\hat{y} \perp x_i \qquad \boxed{\text{ERROR} \perp \text{DADES}}$$

$$* \text{ Si } X_K \text{ ORTOGONALS} \Rightarrow \boxed{c_i = \frac{\langle y, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle}}$$

*PARSEVAL

$$\boxed{\|y\|^2 = \sum |c_K|^2 \|x_K\|^2}$$

∘ SÈRIES DE FOURIER

$$\boxed{y = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\langle y, X_K \rangle}{\langle X_K, X_K \rangle} X_K} \Leftrightarrow \langle X_K, X_L \rangle = 0 \quad \forall K \neq L$$

sinó es poden ORT per G-M

* Sèrie trigonomètrica en $\mathcal{L}^2[-L, L]$ base $\{1, \cos K\frac{\pi}{L}t, \sin K\frac{\pi}{L}t\}_{K\geq 1}$

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_K \cos k\frac{\pi}{L}t + b_k \sin k\frac{\pi}{L}t$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(t)\,dt \,;\; a_K = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(t)\cos K\frac{\pi}{L}t\,dt \,;\; b_K = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} y(t)\sin K\frac{\pi}{L}t\,dt$$

* Sèrie exponencial complexa en $\mathcal{L}^2[-L, L]$ base $\{e^{jK\frac{\pi}{L}t}\}_{K\geq 1}$

$$y(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} a_K e^{jK\frac{\pi}{L}t}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} y(t)\,dt \,;\; a_K = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} y(t)\, e^{jK\frac{\pi}{L}t}\,dt$$

* $\left\{1, \begin{matrix} \sin K\frac{\pi}{L}t \\ \cos K\frac{\pi}{L}t \end{matrix}\right\}_{K\geq 1} \quad \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}[0, L]$

∘ TRANSFORMADA DE FOURIER

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt} \qquad \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df} \qquad \mathcal{L}^2[-\infty,\infty]$$

* Propietats :

- Linealitat → $\mathcal{F}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha \mathcal{F}\{x\} + \beta \mathcal{F}\{y\}$
- Simetries → $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(-f) = \overline{X(f)}$

  $x(t)$ parella $\in \mathbb{R} \Rightarrow X(f)$ parella $\in \mathbb{R}$
- Dualitat → $\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$
- Escalat → $\mathcal{F}\{x(at)\} = 1/|a|\, X(f/a)$
- Desplaçament en t → $\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
- Modulació → $\mathcal{F}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = 1/2\,(X(f-f_0) + X(f+f_0))$
- Derivació → $\mathcal{F}\{x'(t)\} = j2\pi f X(f)$
- Convolució → $\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)\, Y(f)$
- Tª PARSEVAL → $\boxed{\langle x(t), y(t)\rangle = \langle X(f), Y(f)\rangle} \Rightarrow \boxed{\|x\|^2 = \|X\|^2}$

* Transformades d'algunes funcions

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \qquad \delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{-at}U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f} \qquad e^{at}U(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$\Pi(t) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f)$$

$$\mathrm{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \qquad U(t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\, X(f)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$x(t)$ periòdica $\boxed{x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \;;\; c_n = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right)}$ $\quad X(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

SÈRIES I TRANSFORMADES DE FOURIER DISCRETES

∘ Sèries de Fourier discretes (DFS)

$\{\phi_n(t) = e^{j2\pi\frac{n}{T}t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base ortogonal $\mathcal{L}^2[0,T]$

Mostrejant $\phi_n(t)$ en N punts equiespaiats

$$\phi_n\left[k\frac{T}{N}\right] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \omega^{kn} \qquad \boxed{\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

$\phi_n = \{1, \omega^n, \omega^{2n}, \omega^{3n}, \ldots, \omega^{(N-1)n}\}$ base ortogonal $\mathbb{C}^N$

$$\boxed{X[n] = \sum_k x[k]\,\omega^{-kn}} \qquad \boxed{x[k] = \frac{1}{N}\sum_n X[n]\,\omega^{nk}}$$

∘ Transformada de Fourier per a temps discret

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,e^{-j2\pi fk}} \qquad \boxed{x[k] = \int_0^1 X(f)\,e^{j2\pi fk}\,df}$$

∘ Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$\boxed{X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,\omega^{-nk}} \qquad \boxed{x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\,\omega^{nk}}$$

- Algoritme FFT (fast Fourier Transform)

$$\boxed{X[n] = X_p[n] + \omega^{-n}X_s[n]}$$ X_p, X_s: Seq. termes parells, senars

- Propietats DFT

* Linealitat:
* Simetria: $x[k]\in\mathbb{R} \Rightarrow X[-n \bmod N] = \overline{X[n]}$
* Dualitat: $\mathcal{F}\{X[k]\} = N\,x[-n \bmod N]$
* Desplaçament en t: $\mathcal{F}\{x[k-m \bmod N]\} = X[n]\,\omega^{-nm}$
* Convolució $\left\{x[k]*y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]\,y[k-i]\right\}$: $x[k]*y[k] \leftrightarrow X[k]\,Y[k]$
* T^a Parseval: $\boxed{\sum_{k=0}^{N-1}|x[k]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|X[n]|^2}$

VARIABLE COMPLEXA

- PROPIETATS

$\mathrm{Re}\{z\} = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}\{z\} = \frac{z-\bar{z}}{2}$; $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$; $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1 - z_1|$

$$\boxed{\ln z = \ln r + j(\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (enters)}}$$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arg(z) = tg^{-1}(y/z)$

$$e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$$

$$z^n = [r(\cos\theta + j\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$$

- FUNCIONS D'UNA VARIABLE COMPLEXA

$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ $\qquad u, v \in \mathbb{R}$

- Límits i continuïtat ⇒ IDEM $\mathbb{R}$ (compte amb les log.)

* DERIVACIÓ

- *Condicions de Cauchy-Riemann*

f dif. en z_0 ⟺ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \& \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$

La derivada val $\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}}$

Les cond. de C-R es compleixen allà on $\boxed{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0}$

- Una funció és ANALÍTICA en un punt si és derivable en un entorn d'aquest punt.
- Una funció es ENTERA si és analítica per tot $z_0 \in \mathbb{Z}$
- Si $f(z)$ analítica ⇒ u, v, ARMÒNIQUES

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

- Derivades de funcions elementals ⇒ IDEM $\mathbb{R}$

* INTEGRACIÓ :

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]\, z'(t)\,dt}$$

PROPIETATS

1) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$

2) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

3) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \max\left(|f(z)|, \text{en } C\right)\cdot \text{long}(C)$

- T^a CAUCHY

$f(z)$ analítica en $D \subset C$
C arc tancat i dif. $\Rightarrow \boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$

- Fòrmula integral de Cauchy

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad \text{si } z_0 \subset C}$$

la integral val 0 si z_0 és exterior a C

- Fòrmula integral de Cauchy per a les derivades

$$\boxed{f^{n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

* T^A DE TAYLOR

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + f'(z-z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z-z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots}$$

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{o} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}}$$ Radi convergència

$f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)} \Rightarrow R = |z_k|$ $\quad z_k$ valor de z més proper a 0 que fa $g(z) = 0$

* SÈRIES DE LAURENT

$$\boxed{\begin{array}{l} f(z) = \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}^{\text{Desenvolupament taylor}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{1}{(z-z_0)^n} \\ a_n = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_T \dfrac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}\,d\omega \quad b_n = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_T f(\omega)(\omega-z_0)^{n-1}\,d\omega \end{array}}$$

ó tb $\quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad c_n = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_T \dfrac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}}\,d\omega$

- Si una funció es analítica $\forall z \in \mathbb{C}$ llavors el seu desenvolupament és el de Taylor
- Per obtenir la serie més fàcilment:
  - Es fa el desenvolupament de Taylor i surt directament

    Ex.: $e^{1/z} \rightarrow 1 + 1/z + 1/2!z^2 + 1/3!z^3 + \dots$
  - Si $f(z)$ es del tipus $\dfrac{\cdots}{(z+a)\cdot(z+b)}$ es descompon $\dfrac{A}{(z+a)} + \dfrac{B}{(z+b)}$
  - Fent servir els residus de la funció.
- Si el desenvolupament té un nombre finit de termes: $\dfrac{b_1}{z-z_0} + \dfrac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \dfrac{b_K}{(z-z_0)^K}$ llavors z_0 és un pol d'ordre K

* RESIDUS

- El residu de $f(z)$ en z_0 son els b_n del seu desenvolupament en series de Laurent en $(z-z_0)$

$$\boxed{Res\{f(z), z_0\} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(K-1)!}\cdot\frac{d^{z-1}}{dz^{K-1}}\left[(z-z_0)^K f(z)\right]}$$

K: ordre del pol z_0

- Si $(z-z_0)^K f(z)$ continua donant singularitats (p.e. 0/0) en derivar n cops, llavors l'ordre del pol era n-1 en comptes de K

Ex.: $\dfrac{1-chz}{z^3}$ tè 1 pol en $z=0$, no 3 $\left\{ 1-chz|_0 = 0 \;;\; -shz|_0 = 0 \right\}$

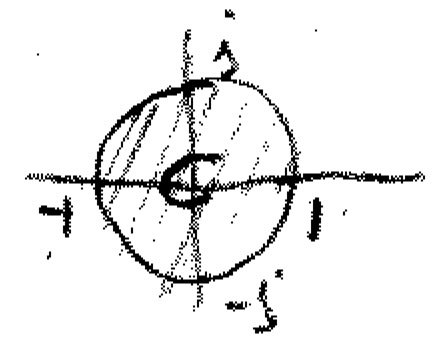
* APLICACIONS

- T^a DEL RESIDU

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\{f(z), z=z_j\}}$$

Per als pols z_j que es trobin dins C

- CÀLCUL DE INTEGRALS REALS



- $\int_0^{2\pi} H(\sin x, \cos x)\,dx$ | fem el canvi: $dx = \frac{dz}{jz}$; $\cos x = \frac{z-z^{-1}}{2}$; $\sin x = \frac{z-z^{-1}}{2j}$

  - A continuació apliquem el teorema del residu.

- $\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx$; H(x) no tè pols al eix real; El grau del denominador $\geq$ grau num. +2

  - S'aplica el T^a del residu en el recinte $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

- $\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \left\{ \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix} \right\} dx$ igual que el cas anterior, però substituim $\sin \alpha x, \cos \alpha x$ per $e^{j\alpha x}$ i agafem només la part real del resultat.

- $\int_0^{\infty} H(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx$ (Normalment)