COMUNICACIONES II

TEMA 1: INTRODUCCIÓN

- Vel. Modulación $\boxed{r_B = f_s \cdot b'}$ f_s : muestras segundo, b' : bits por muestra
- Vel. Transmisión $\boxed{r_s = r_B / b}$ [baudios] b: bits por símbolo
- # símbolos diferentes: $\boxed{M = 2^b}$
- Ancho bda transmisión $\boxed{B_T \geq \frac{1}{2T_s} = \frac{r_s}{2}}$
- Teorema Shannon (Máx vel. transmisión) $\boxed{r_b = B_c \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}$ B_c : Bandwithd del canal

TEMA 2: TX DIGITAL A TRAVES DE CANALES AWGN

Expresión de una modulación digital $\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{K[n]}(t - nT)}$

- REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES

1° Buscar una base ortonormal $\{\varphi_i(t)\}$

- Por inspección directa

  Los φ_i han de ser normales y de energía unitaria $\boxed{\int \varphi_i^2(t)\,dt = 1}$

- Ortogonalización por Gram - Schmidt

$$\varphi_1'(t) = s_1(t)$$

$$\varphi_n'(t) = s_n(t) - \sum_{K=1}^{n-1} \frac{\langle s_n(t), \varphi_K'(t)\rangle}{\langle \varphi_K'(t), \varphi_K'(t)\rangle}$$

Normalizar $\Rightarrow \varphi_i = \frac{\varphi_i'}{\|\varphi_i\|}$

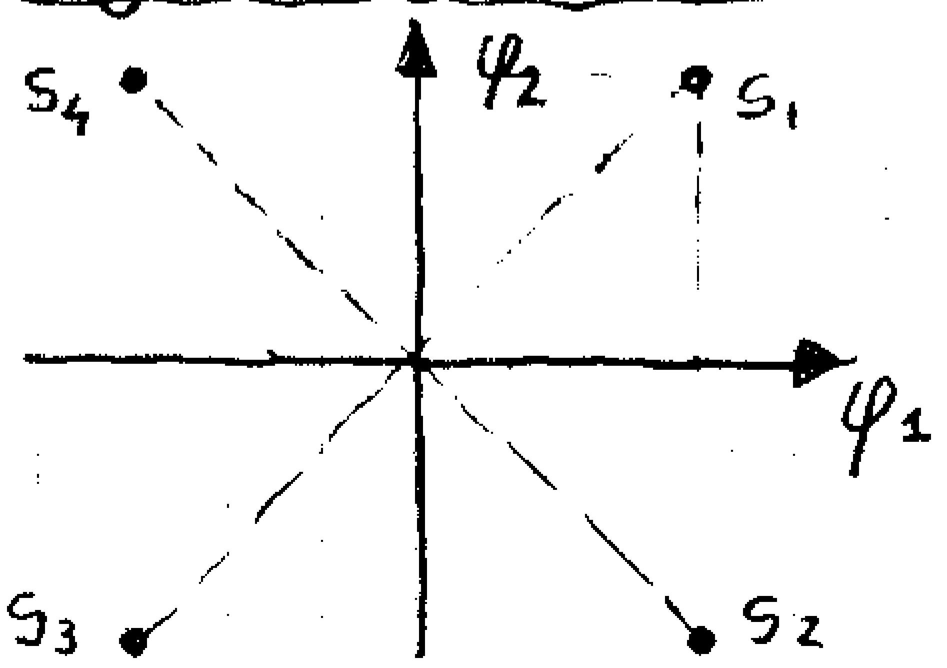
2º Hallar las componentes de $\alpha_{m,i}$

$$\boxed{\alpha_{m,i} = \langle s_m(t), \varphi_i(t) \rangle} = \int s_m(t)\, \varphi_i(t)\, dt$$

3º Expresar señales como combinación vectores de la base

$$\boxed{\underline{s_m} = \underline{\alpha_m} \cdot \underline{\varphi} = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{m,\ell} \cdot \varphi_\ell}$$

4º Dibujar la constelación de la modulación (si se puede)



$$\underline{s_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}$$

- Angulo entre dos señales $\quad \theta_{ij} = \arccos\left(\dfrac{\underline{s_i}^H \cdot \underline{s_j}}{\|\underline{s_i}\| \cdot \|\underline{s_j}\|} \right)$
- Distancia entre dos señales $\quad \boxed{d_{ij} = \| \underline{s_i} - \underline{s_j} \|}$

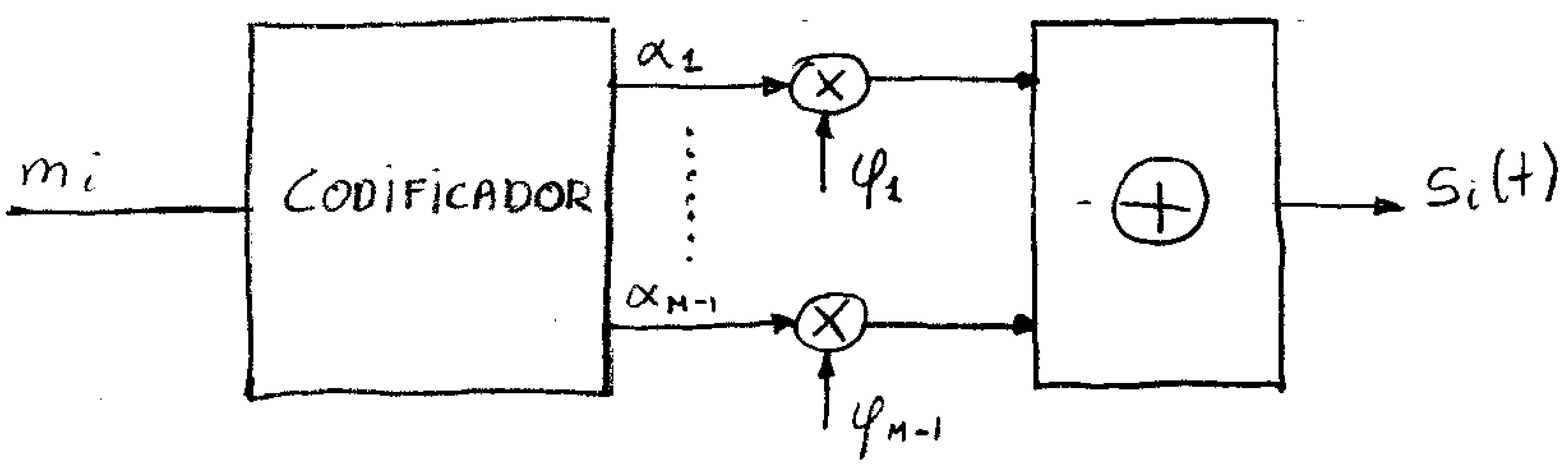
* Energia media de simbolo y de bit

$$\boxed{E_{s_i} = \| \underline{s_i} \|^2}$$

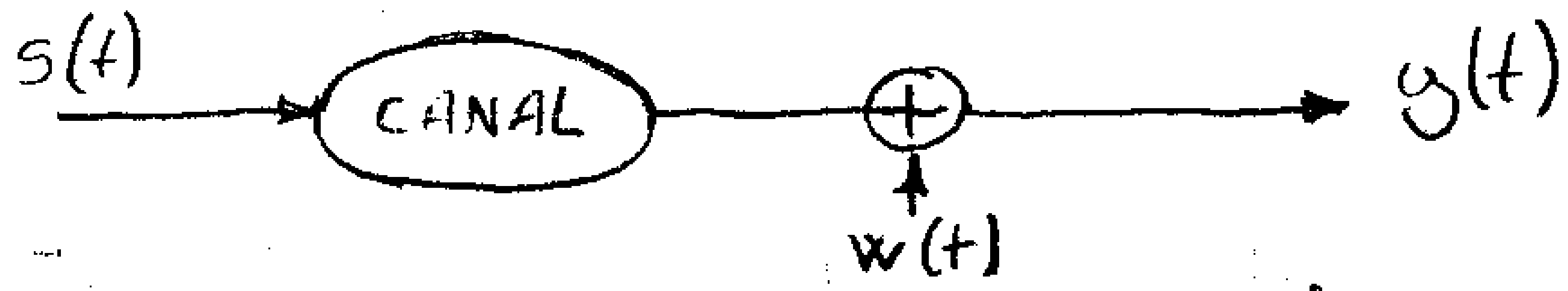
$$\boxed{\hat{E}_s = \sum_{i=1}^{M} \text{Prob}\{s_i\} \cdot E_{s_i}}$$

$$\boxed{E_b = \frac{\hat{E}_s}{b} = \frac{\hat{E}_s}{\log_2 M}}$$

- ESTRUCTURA DEL MODULADOR EN ESPACIO DE SEÑAL



– Ruido y espacio de señal



$$y(t) = s(t) + n(t) \implies$$ Solo tenemos en cuenta el ruido dentro de nuestro espacio de señal.

$$\boxed{\underline{y} = \underline{s} + \underline{n}} \qquad \underline{n} = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \cdot \varphi_j$$

$$\boxed{f_N(\underline{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\underline{n}\|^2}{N_0}}}$$

– Detector óptimo

Criterio MAP: Una vez recibida la señal decidir cual es el símbolo que es más probable q se haya transmitido.

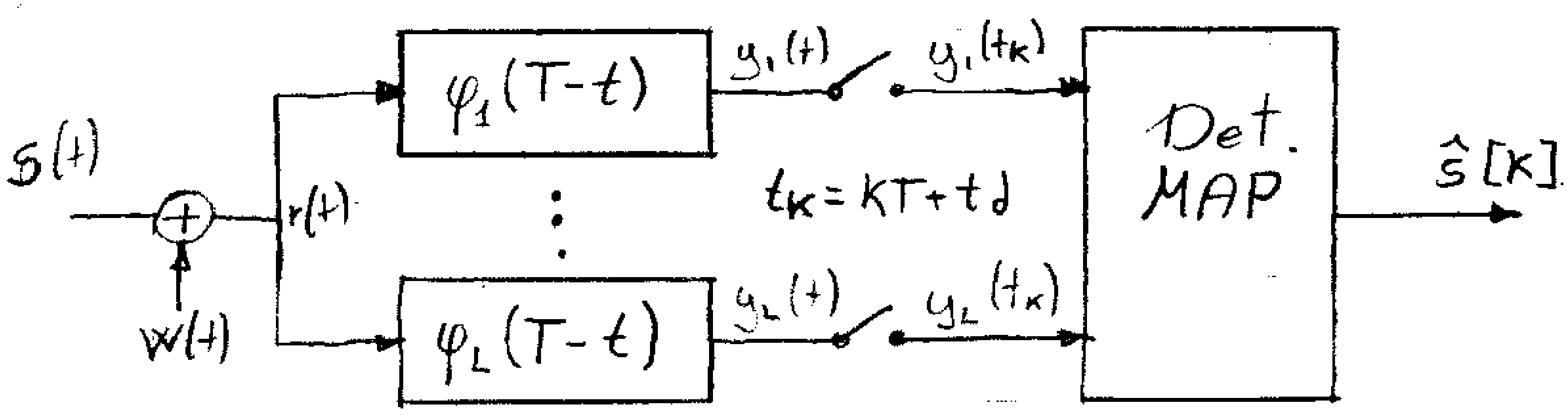
$$\boxed{s_i(t) \quad tq \quad \min_i \left(\|\underline{y} - \underline{s_i}\|^2 - N_0 \ln\{Prob(s_i)\} \right)}$$

$$\boxed{\text{" } \quad \text{" } \quad \max_i \left(\langle \underline{y}, \underline{s_i} \rangle - \frac{E_{si}}{2} + \frac{N_0}{2} \ln\{P(s_i)\} \right)}$$

Criterio ML: IDEM suponiendo $P(s_i) = 1/M$ (todas iguales)

$$\boxed{\min_i \|\underline{y} - s_i\|^2} \qquad \boxed{\max_i \langle \underline{y}, s_i \rangle - E_{si}/2}$$

- Estructura del detector

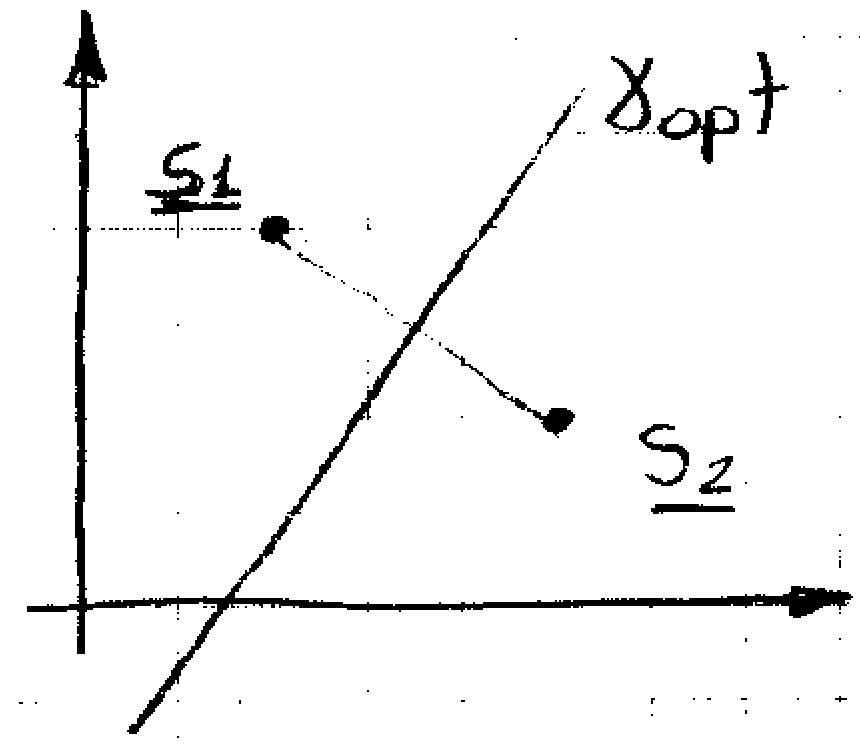


$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{L} \alpha_j[n]\, \varphi_j(t - nT) + w(t)$$

$$y_\ell(t_K) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{L} \alpha_j[n]\, R_{\varphi_j \varphi_\ell}((k-n)T) + \beta_\ell(t_K)$$

Frontera de decisión entre dos símbolos

$$\langle \underline{y}, \underline{s_1} \rangle - \frac{E_1}{2} + N_0 \ln\{P\{s_1\}\} \overset{!!}{=} \langle \underline{y}, \underline{s_2} \rangle - \frac{E_2}{2} + N_0 \ln\{P\{s_2\}\}$$



$$\boxed{\gamma_{opt} = \frac{D}{2} - \frac{\sigma_N^2}{D} \ln\left\{\frac{P\{s_2\}}{P\{s_1\}}\right\}}$$

$$\sigma_N^2 = N_0/2$$

PROBABILIDAD DE ERROR

- Cálculo exacto de la prob. de error de símbolo

$$\boxed{P_s(e) = \sum_{m=1}^{M} P(s_m)\, P(e|s_m)}$$

$P(s_m)$ Prob. de transmitir s_m

$$\boxed{P(e|s_m) = \underbrace{\sum}_{\text{Todas las regiones menos la que contiene } s_m} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f_y(\underline{y}, s_m)\, dy}$$

$P(e|s_m)$ prob. de error al enviar s_m

- Cotas para el error de símbolo y de bit

$$\boxed{P_s(e) \leq \frac{M-1}{M} \sum_{m=1}^{M} Q\left(\frac{D_{m,min}}{2\sigma}\right)}$$

$D_{m,min}$: distancia entre el símbolo m y el más cercano a él.

$$\boxed{\frac{P_s(e)}{b} \leq BER \leq P_s(e)}$$

- Aproximación a la $P_s(e)$, BER

$$P(e|s_m) \simeq K_m\, Q\left(\frac{D_{m,min}}{2\sigma}\right)$$

K_m: # símbolos a dist. $D_{m,min}$ del símbolo s_m

$$\boxed{P_s(e) \simeq \sum_m P(s_m)\, K_m\, Q\left(\frac{D_{m,min}}{2\sigma}\right)}$$

- Usando codificación Gray ⇒ Símbolos próximos difieren en 1 bit.

$$\boxed{BER \simeq \frac{P_s(e)}{b} = \frac{P_s(e)}{\log_2 M}}$$

13 - Transmisiones digitales a través de canales AWGN limitados en BDA

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell[n]\,\varphi_\ell(t-nT)}$$

- Se trata de procesos estacionarios $\Rightarrow$

$$\boxed{\mu_{\alpha_\ell} = E\{\alpha_\ell[n]\}} \qquad \boxed{R_{\alpha_\ell \alpha_j}[K] = E\{\alpha_\ell[n+K]\,\alpha_j[n]\}}$$

$$C_{\alpha_\ell \alpha_j}[K] = E\{(\alpha_\ell[n+K] - \mu_{\alpha_\ell})(\alpha_j[n] - \mu_{\alpha_j})\}$$

$$R_{\alpha_i \alpha_j}[K] = C_{\alpha_\ell \alpha_j}[K] + \mu_{\alpha_\ell}\mu_{\alpha_j} \quad \Big| \ \alpha_i \text{ indep} \Rightarrow C_{\alpha_\ell \alpha_j}[K] = C_{\alpha_\ell \alpha_j}[0]\,\delta[K]$$

$$\mu_{\alpha_\ell} = \sum_{m=1}^{M} P\{s_m\}\,\alpha_{m\ell}[K]$$

$$R_{\alpha_\ell \alpha_j}[K] = \sum_{m=1}^{M} P\{s_m\}\cdot \alpha_{m\ell}[n+K]\,\alpha_{mj}[n]$$

- El proceso $s(t)$ es cicloestacionario

$$\mu_s(t) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu_{\alpha_\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_\ell(t-nT)$$

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} R_{\alpha_\ell \alpha_j}[K]\, R_{\varphi_\ell \varphi_j}(\tau - KT)$$

$$P_s = \frac{1}{T} \sum_{\ell=1}^{L} R_{\alpha_\ell \alpha_\ell}[0] = \frac{E_s}{T_s} = \frac{E_b}{T_b}$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} S_{\varphi_\ell \varphi_j}(f)\, S_{\alpha_\ell \alpha_j}(f) \quad \Big| \ S_{\alpha_\ell \alpha_j}(f) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_{\alpha_\ell \alpha_j}[K]\, e^{-j2\pi K f T}$$

- Para modulaciones PAM $(L=1)$

$$\hat{R}_s(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_{\alpha_1}[K]\cdot R_{\varphi_1}(\tau - KT)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} R_{\alpha_1}[K]\, e^{-j2\pi f K T}\, |\varphi_1(f)|^2 =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_{\alpha_1}[K]\, e^{-j2\pi f K T}\, |\varphi_1(f)|^2 + \frac{1}{T^2}|\mu_{\alpha_1}|^2 \sum_{K=-\infty}^{\infty} |\varphi_1(K/T)|^2\,\delta\!\left(f - \frac{K}{T}\right)$$

- Para modulaciones sin memoria $S_s(f) \propto |\varphi(f)|^2$

* Pulsos de Nyquist

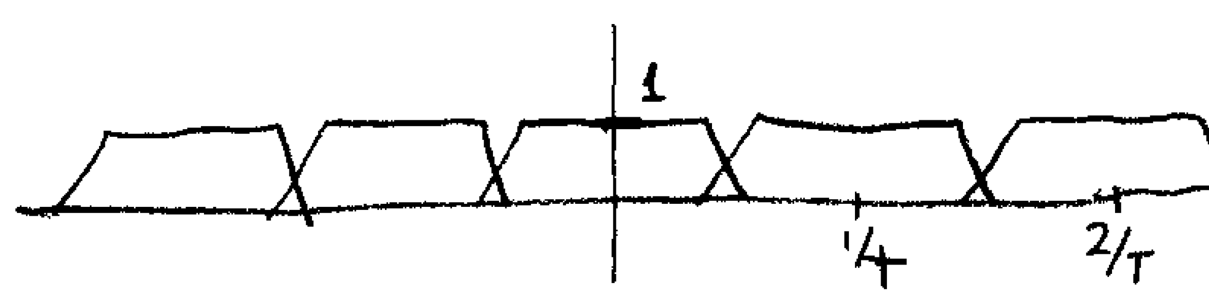
- No ISI $\Rightarrow R_{\varphi_j \varphi_\ell}(KT) = \delta[K]\,\delta[j-\ell]$ $\begin{cases} 1 & K=0 \ \&\ \ell=j \\ 0 & K\neq 0 \ | \ \ell \neq j \end{cases}$

$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_j(f-\frac{n}{T})\,\varphi_\ell^*(f-\frac{n}{T}) = \delta[j-\ell]$

- Limitados en bda $\Rightarrow |\varphi_j(f)\,\varphi_\ell^*(f)| = 0$ si $|f| \geq B_c$

- CASO $L=1$ $\Rightarrow \begin{cases} R_{\varphi_1} = \delta[K] \\ |\varphi_1(f)| = 0 \quad |f| \geq B_c \end{cases}$

Dominio frec $\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\varphi_1}\!\left(f - \frac{n}{T}\right) = 1$



- Diseño de $\varphi_1(t)$:
  - Elección de $S_{\varphi_1}(f)$
  - Obtencion $\varphi_1(f) = \sqrt{S_{\varphi_1}(f)}$
  - Obtencion $\varphi_1(t) = TF^{-1}\{\varphi_1(f)\}$

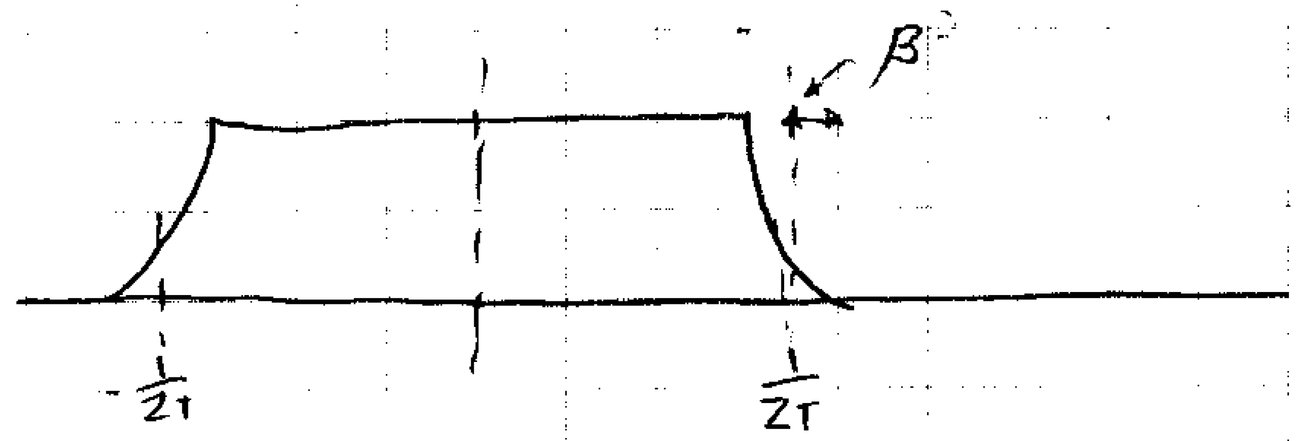
Funciones que cumplen ISI = 0

sinc 1. $R_{\varphi_1}(t) = \text{sinc}(t/T) \rightarrow \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\text{sinc}(t/T)$

2. Raised cosinus

$$R_{\varphi_1}(t) = \text{sinc}(t/T)\,\frac{\cos(2\pi\beta t)}{1-(4\beta t)^2}$$

$$S_{\varphi_1}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1}{2T} - \beta \\ T\cos^2\left(\frac{\pi}{4\beta}\left(|f| - \frac{1}{2T} + \beta\right)\right) & \frac{1}{2T} - \beta < |f| < \frac{1}{2T} + \beta \\ 0 & \frac{1}{2T} + \beta < |f| \end{cases}$$



Factor de Roll-Off

$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{1/2T}}$$

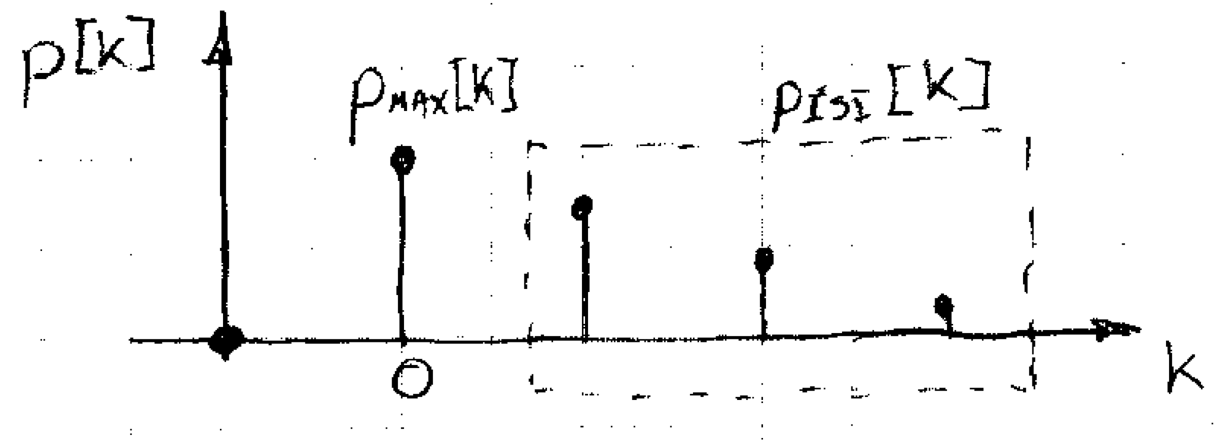
$$\boxed{B_{RC} = \frac{1}{2T} + \beta}$$

* ECUALIZACIÓN PARA L = 1

$$\cancel{y_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_1[n]\, R_{\varphi}(t-nL) * h_c(t) + \beta_1(t)}$$

$$y_1[k] = \sum_{n=k}^{k+L_c} \alpha_1[n]\, p_{11}[k-n] + \beta_1[k]$$

Suponemos q. la ISI se extiende L_c+1 muestras.



$$\boxed{ISI_{dB} = 20\log\left(\left|\frac{p[k]_{MAX}}{p[k]_{ISI\_MAX}}\right|\right)}$$

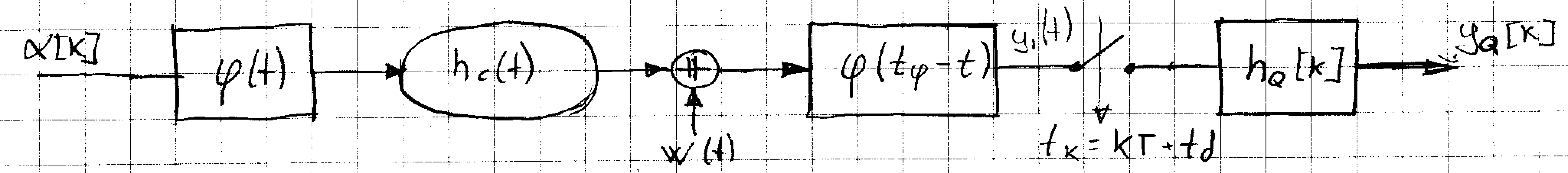
- Para implementar los filtros de forma digital (FIR) habrá que determinar los coeficientes según la metodología:

1. Formular la función de error a minimizar.
2. Derivar respecto los coef. e igualar a 0 las derivadas obtenidas
3. Calcular $R_\alpha[n]$, $\beta[K]$, y demás parámetros calculables y substituir en la anterior ecuación.
4. Obtener los coef.

detrás

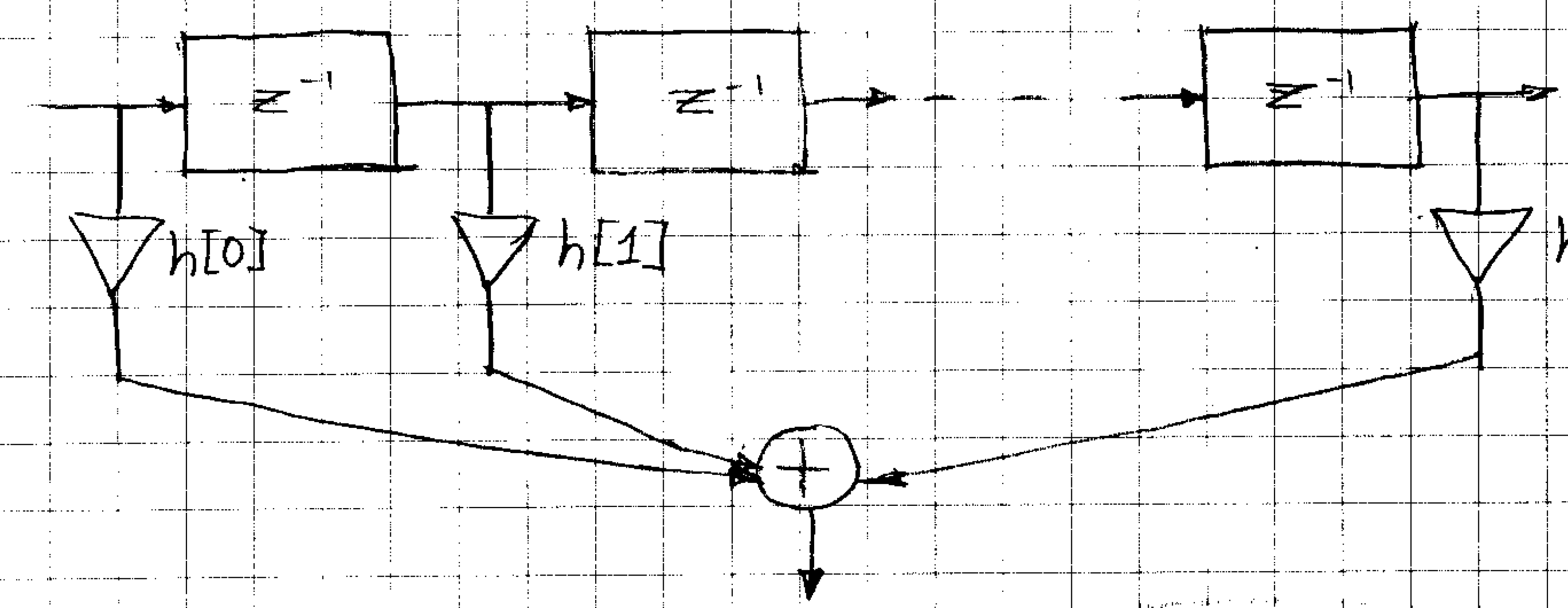
IMG. Ecualizaciones y condiciones a cumplir

○ ECUALIZACIÓN DISCRETA



FIR finito ⇒ $h_Q[K] = \sum_{\ell=0}^{L_Q} h[\ell]\,\delta[K-\ell]$

long L_Q+1



- Criterio de Forzador de Ceros (FZ)

$$p[K] * h_Q[K] = \varphi_Q[K] \overset{!!}{=} \delta[K-K_o]$$

h_Q long L_Q+1

p long L_c+1

$$\begin{pmatrix} p[0] & 0 & : & 0 \\ p[1] & p[0] & : & 0 \\ p[2] & p[1] & : & 0 \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ 0 & 0 & : & p[L_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_Q[0] \\ h_Q[1] \\ \vdots \\ h_Q[L_Q] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_Q[0] \\ p_Q[1] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_Q[L_c+L_Q] \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{P}\cdot\underline{h} = \underline{p_Q}$$

Minimizar $\mathcal{E}_{FZ} = \| \underline{P}\cdot\underline{h} - \underline{p_Q} \|^2 \Rightarrow \boxed{\hat{\underline{h}} = (\underline{P}^T\cdot\underline{P})^{-1}\underline{P}^T\underline{p_Q}}$

• Ruido a través del ecualizador discreto

$$\boxed{\sigma^2_{\beta_Q} = \frac{N_o}{2}\sum_{j=0}^{L_Q} h^2[j]} \qquad \boxed{\left(\frac{\sigma^2_{\beta_Q}}{\sigma^2_\beta}\right)_{dB} = 10\log\left(\sum_{j=0}^{L_Q} h^2[j]\right)}$$

- Criterio MSE (Minium Square Error)

Minimizar $\mathcal{E}_{MSE} = E\{|y_Q[K] - \alpha[K-K_o]|^2\}$

• codificación sin memoria
• símbolos media nula

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{L_Q} h[j]\,R_y[j-\ell] = E\{y[K-\ell]\,\alpha[K-K_o]\} = \sigma^2_\alpha\, p[K_o-\ell]$$

$$\begin{pmatrix} R_y[0] & R_y[1] & : & R_y[-L_Q] \\ R_y[1] & R_y[0] & : & R_y[1-L_Q] \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ \vdots & \vdots & : & \vdots \\ R_y[L_Q] & R_y[L_Q-1] & : & R_y[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L_Q] \end{pmatrix} = \sigma^2_\alpha \begin{pmatrix} p[K_o] \\ p[K_o-1] \\ \vdots \\ p[K_o-L_Q] \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{R_y}\,\underline{h} = \sigma^2_\alpha\,\underline{p}[K_o-\ell]$$

$$\underline{h} = \sigma^2_\alpha\,\underline{R_y}^{-1}\,\underline{p}[K_o-\ell] \quad ; \quad \underline{R_y} = \sigma^2_\alpha\,\underline{R_p} + \frac{N_o}{2}\,\underline{I}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

☐ E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

☐ E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

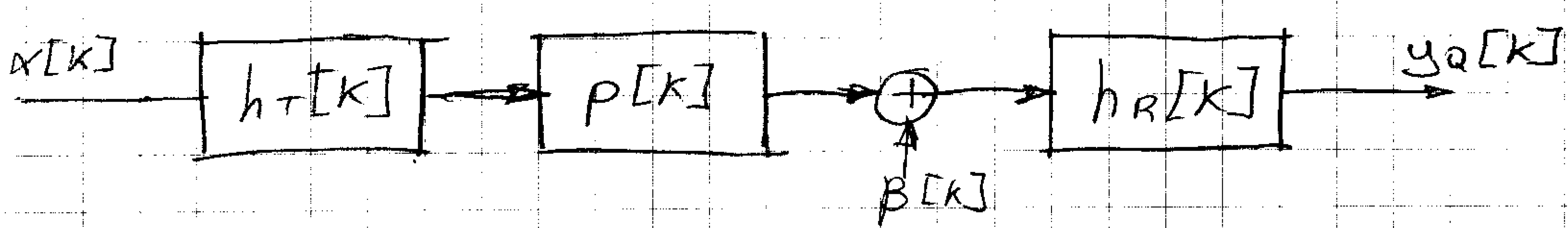
☐ Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms   Nom   **Pàgina** ______ **de** ______

– Filtros Terminales Óptimos



Con modulacion MPAM y símbolos equiprobables:

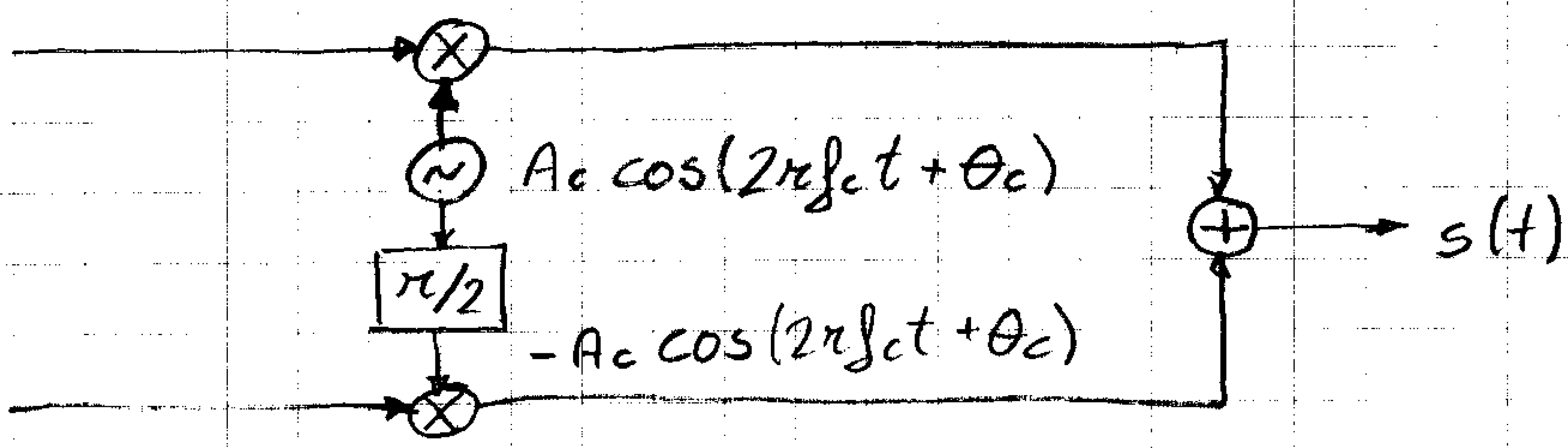
$$\boxed{|H_T(\Omega)|^2 = \lambda \frac{1}{|P(\Omega)|}} \qquad \boxed{|H_R(\Omega)|^2 = \lambda \frac{1}{|P(\Omega)|}}$$

Tema 4: Modulaciones Digitales con portadora

$$\boxed{s(t) = A_c\, i_s(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_c) - A_c\, q_s(t) \sin(2\pi f_c t + \theta_c)}$$

$$\boxed{i_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_i[n]\, p(t-nT)} \qquad \boxed{q_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_q[n]\, p(t-nT)}$$

$\mu_{\alpha_i} = \mu_{\alpha_q} = 0$; $\alpha_i[n]$, $\alpha_q[n]$ indep.



$$\boxed{\mu_s(t) = 0} \qquad \boxed{\hat{R}_s(\tau) \approx \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \left[\hat{R}_{i_s}(\tau) + \hat{R}_{q_s}(\tau)\right]}$$

$$S_s(f) = \frac{A_c^2}{2}\left[S_{i_s}(f-f_c) + S_{i_s}(f+f_c) + S_{q_s}(f-f_c) + S_{q_s}(f+f_c)\right]$$

$$P_s = \hat{R}_s(0) = \frac{A_c^2}{2}\left[P_{i_s} + P_{q_s}\right]$$

- <u>ASK</u> $\rightarrow$ $i_s(t)$, $q_s(t)$ ~ PAM (unipolar)

Representación en el espacio de señal:

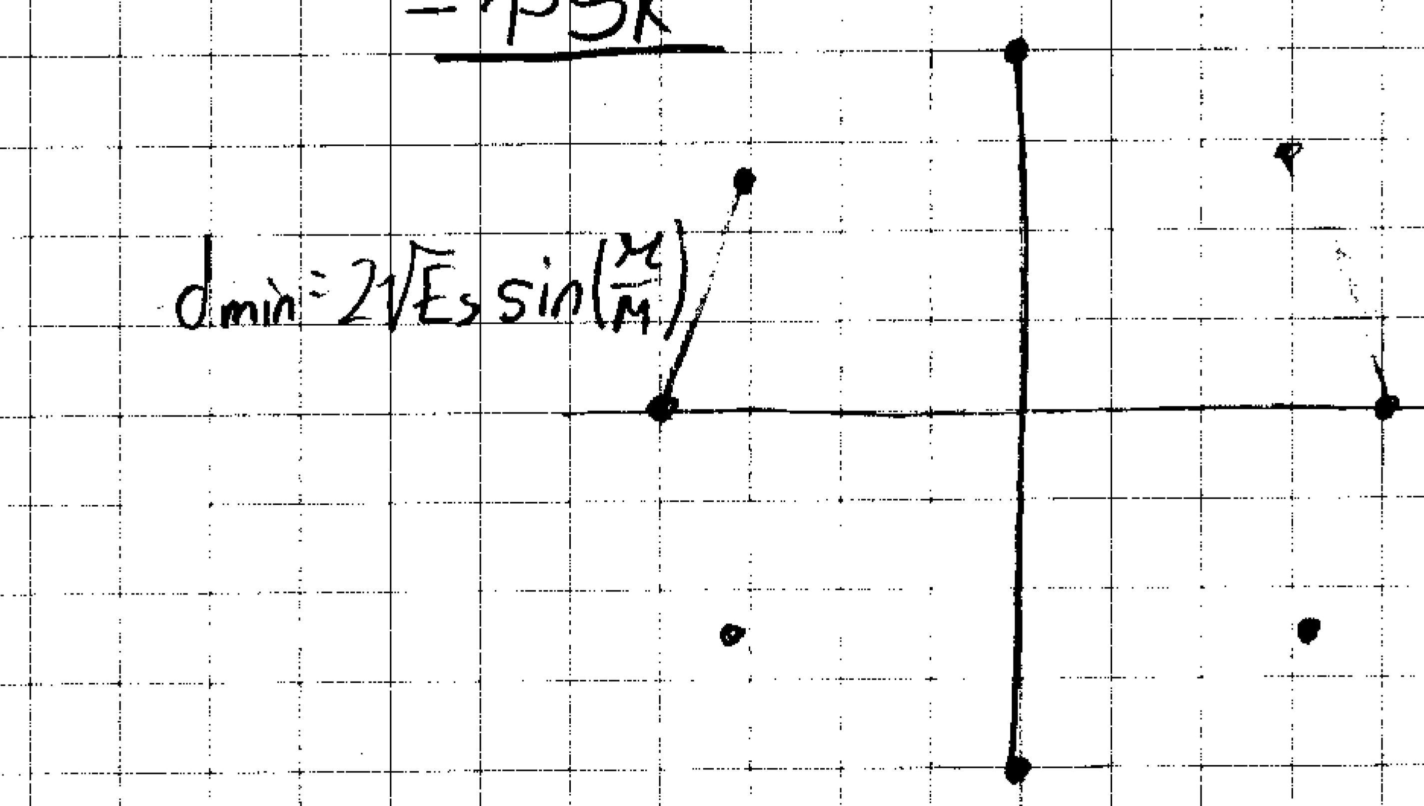
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(I[n]\, \varphi_I(t) + Q[n]\, \varphi_Q(t) \right)$$

$$\varphi_I(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\, \varphi(t-nT) \cos(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$\varphi_Q(t) = - \quad " \quad " \quad \sin(2\pi f_c t + \theta_c)$$

$$I[n], Q[n] \rightarrow \alpha_{PAM} = \{0, 1, 2, \dots, (M-1)\} \times A_c\sqrt{\frac{T}{2}}$$

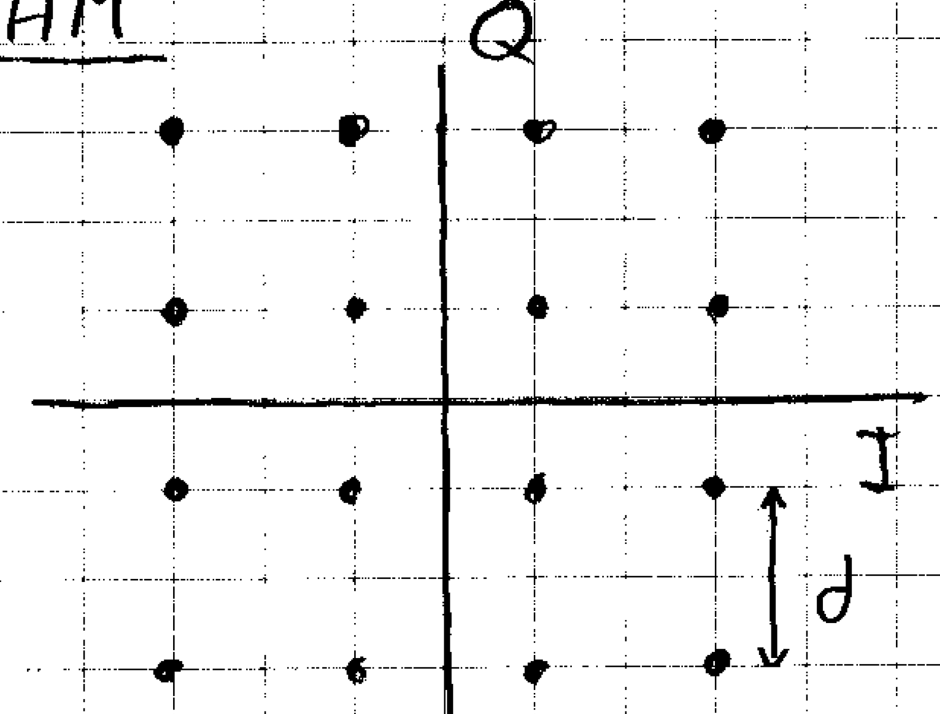
- <u>PSK</u>



$$s_m = \begin{pmatrix} I_m \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_s}\cos\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \\ \sqrt{E_s}\sin\left(\frac{2\pi(m-1)}{M}\right) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{BER \approx \frac{2}{\log_2 M}\, Q\left(\sqrt{2\log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\, \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)}$$

- <u>QAM</u>



En cada dimensión se tiene el equivalente a una PAM de dimensión $M' = \sqrt{M}$

$$s_m^{M\text{-}QAM} = \begin{pmatrix} s_{m1}^{M'\text{-}PAM} \\ s_{m2}^{M'\text{-}PAM} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{BER \approx \frac{4}{\log_2 M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

- <u>FSK</u>

- Es equivalente a una constelación M-ortogonal.

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi(f_c + m\Delta f)t\right) \qquad m \in \{1, \dots, M\}$$

- Separación mínima entre frec. para cumplir ortogonalidad $\Delta f_{min} = \frac{1}{2T}$

- <u>CPFSK</u> (Continuous Phase FSK)

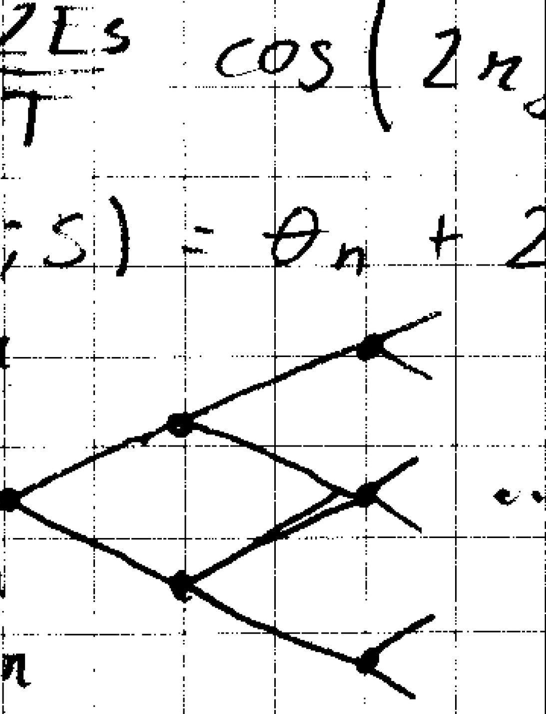
$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \Phi(t; s) + \Phi_0\right)$$

$$\Phi(t; s) = \theta_n + 2\pi \cdot h \cdot s_{m[n]}\, q(t-nT)$$

$h \rightarrow$ Índice mod

$\theta_n \rightarrow$ Fase acumulada

$M = 2 \Rightarrow$



<u>MSK</u> $\rightarrow$ CPFSK $M=2$; $h = 1/2$